GS.TS NGUYỄN QUANG BÁU - NGUYỄN CẢNH HOÈ

Bài tập Vật lí NÂNG CAO 10

DÙNG CHO HỌC SINH CHUYÊN LÍ,
LUYỆN THI HỌC SINH GIỎI VÀ THI VÀO ĐẠI HỌC



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

GS.TS NGUYỄN QUANG BÁU - NGUYỄN CẢNH HOÈ

Bài tập Vật lí NÂNG CAO 10

DÙNG CHO HỌC SINH CHUYÊN LÍ,
LUYỆN THI HỌC SINH GIỎI VÀ THI VÀO ĐẠI HỌC

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập: PHẠM THÀNH HƯNG

Biên tập : QUANG HÙNG
NGUYỄN THỊ THUỶ

Trình bày bìa: HOÀNG VĨNH

Chế bản: Công ty DV – TM – VĂN HÓA BẢO LONG

BÀI TẬP VẬT LÍ NÂNG CAO 10

Mã số: 1L – 02009 - 01404
In 2.000 cuốn, khổ 16 × 24 tại xưởng in Chi nhánh Công Ty Phát Triển Công Nghệ và Truyền Hình. Số xuất bản: 6/1459/XB-QLXB ngày 12/10/2004. Số trích ngang 320 KH/XB.
In xong và nộp lưu chiểu quý IV năm 2004.

LỜI NÓI ĐẦU

Cuốn sách: *"Bài tập Vật lý nâng cao"* được biên soạn dành cho các học sinh muốn tìm hiểu kỹ môn Vật lý, các học sinh khối phổ thông chuyên Lý, luyện thi học sinh giỏi và luyện thi vào Đại học. Sách được biên soạn trên cơ sở nhiều năm các tác giả: GS.TS. Nguyễn Quang Báu và nhà giáo Nguyễn Cảnh Hòe biên soạn cuốn sách này trên cơ sở tích lũy kinh nghiệm nhiều năm giảng dạy, bồi dưỡng học sinh khối chuyên Lý - Đại học Tổng hợp Hà Nội trước đây và nay là Đại học Khoa học Tự nhiên (ĐHQGHN).

Nội dung cuốn sách gồm các phần : Động học, Động lực học, Tĩnh học, Cơ học chất lưu, Vật lý phân tử và nhiệt học. Trong mỗi phần có các mục tóm tắt lý thuyết, các đề bài, lời giải và chỉ dẫn. Mục tóm tắt lý thuyết nhằm giúp học sinh nhớ những khái niệm chính của vấn đề và các công thức căn bản để giải toán Vật lý. Các đề bài được phân ra các bài cho học sinh ở mức độ trung bình và khá (không đánh dấu *) và các bài dành cho học sinh giỏi và xuất sắc (có đánh dấu * hoặc có ghi trích dẫn từ tạp chí Lượng tử của Nga – KB.). Mục các lời giải được trình bày chi tiết nhằm giúp cho các học sinh tự tìm hiểu được những vấn đề khó khi thiếu sự chỉ dẫn trực tiếp của giáo viên.

Các tác giả rất mong nhận được sự góp ý quý báu của độc giả để làm cho nội dung của cuốn sách tốt hơn cho các lần tái bản sau này.

Các tác giả cũng hy vọng rằng cuốn sách có thể giúp ích nhiều cho các em học sinh yêu thích môn Vật lý, muốn học khá giỏi môn Vật lý, các em học sinh khối chuyên Lý và luyện thi vào Đại học.

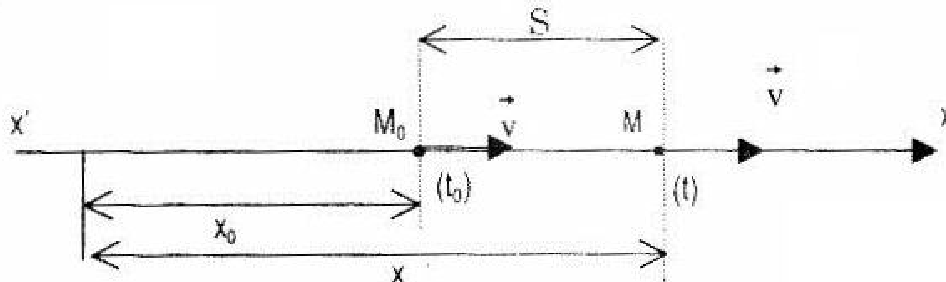
Các tác giả

PHẦN 1 ĐỘNG HỌC

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

CHUYỂN ĐỘNG THẲNG ĐỀU

I. Các phương trình của chuyển động thẳng đều:



– Tọa độ : $x = v(t - t_0) + x_0$

– Đường đi : $s = v(t - t_0)$

– Vận tốc : $v = const$

Ghi chú :

– Nếu các điều kiện đầu sao cho $\begin{cases} t_0 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$, ta có : $x = s = vt$

– $v > 0$ nếu chọn chiều dương là chiều chuyển động.

– $v < 0$ nếu chọn chiều dương ngược chiều chuyển động.

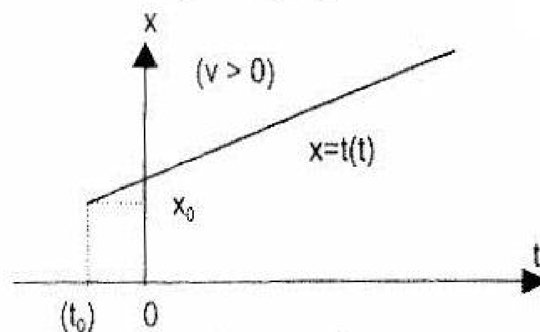
II. Đồ thị của chuyển động :

– Đồ thị tọa độ theo thời gian :

Đồ thị là nửa đường thẳng :

+ Có độ dốc (hệ số góc) là v

+ Giới hạn bởi điểm (x_0, t_0).



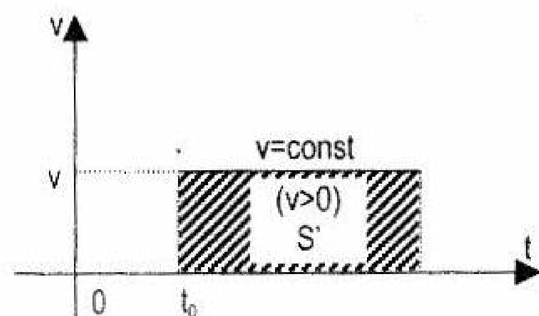
– Đồ thị vận tốc theo thời gian :

Đồ thị là nửa đường thẳng :

+ Song song với trục thời gian.

+ Giới hạn bởi điểm t_0.

Ghi chú : Trên đồ thị vận tốc, đường đi s được biểu diễn bởi diện tích S.



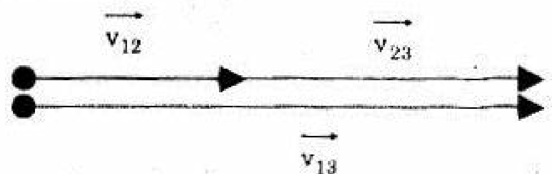
III. Công thức cộng vận tốc (đổi vận tốc theo hệ quy chiếu) :

$$\overrightarrow{v_{13}} = \overrightarrow{v_{12}} + \overrightarrow{v_{23}}$$

Các trường hợp đặc biệt :

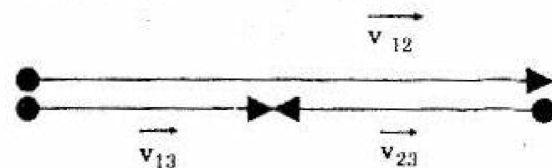
– Các véc tơ vận tốc cùng phương, cùng chiều :

$$v_{13} = v_{12} + v_{23}$$



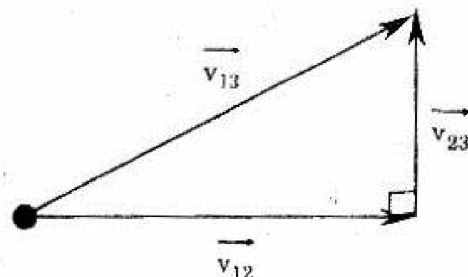
– Các véc tơ vận tốc cùng phương, ngược chiều :

$$v_{13} = v_{12} - v_{23} \quad (v_{12} > v_{23})$$



– Các véc tơ vận tốc vuông góc với nhau :

$$v_{13} = \sqrt{v_{12}^2 + v_{23}^2}.$$



CHUYỂN ĐỘNG THẲNG BIẾN ĐỔI ĐỀU

I. Vận tốc trung bình và vận tốc tức thời của chuyển động thẳng biến đổi:

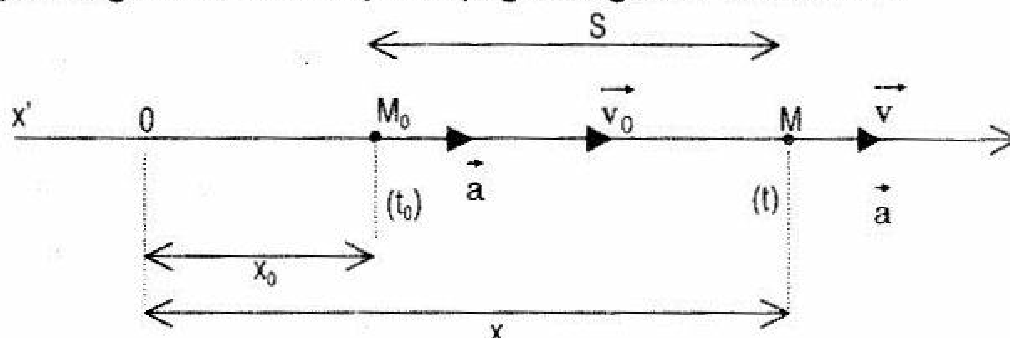
– Vận tốc trung bình : $v = \dfrac{s}{t} = \dfrac{\sum \overline{v_i} t_i}{\sum t_i}$

– Vận tốc tức thời : $v = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}; \vec{v} = \dfrac{\overrightarrow{\Delta s}}{\Delta t}.$

II. Gia tốc trong chuyển động thẳng biến đổi :

$$\vec{a} = \frac{\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}.$$

III. Các phương trình của chuyển động thẳng biến đổi đều là :



– Gia tốc : $a = const$

– Vận tốc tức thời : $v = a(t - t_0) + v_0$

– Tọa độ : $x = \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + x_0$

– Đường đi : $s = x - x_0 = \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0)$

– Hệ thức độc lập với thời gian : $v_2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) = 2as$

Ghi chú :

Nếu chọn hệ quy chiếu và gốc thời gian để có $\begin{cases} t_0 = 0 \\ v_0 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$

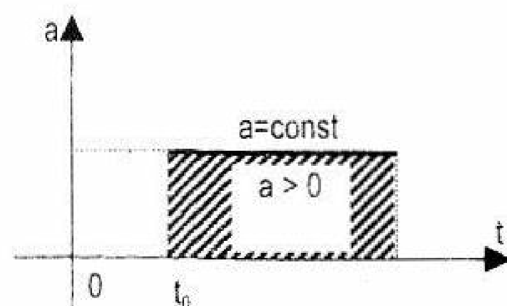
các phương trình sẽ có dạng đơn giản : $v = at; x = s\frac{1}{2}at^2$.

IV. Tính chất của chuyển động :

– Chuyển động thẳng nhanh dần đều : $av > 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{v}$ cùng chiều

– Chuyển động thẳng chậm dần đều : $av < 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{v}$ ngược chiều.

V. Đồ thị của chuyển động :



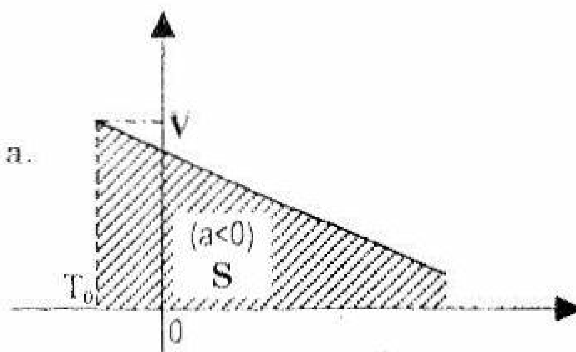
– Đồ thị gia tốc theo thời gian :

Đồ thị là đường thẳng :

+ Song song với trục thời gian

+ Giới hạn bởi thời điểm đầu t_0.

Ghi chú : S biểu diễn vận tốc



– Đồ thị vận tốc theo thời gian :

Đồ thị là nửa đường thẳng:

+ Có độ dốc (hệ số góc) là gia tốc a.

+ Giới hạn bởi điểm (t_0, v_0)

Ghi chú : S biểu diễn đường đi

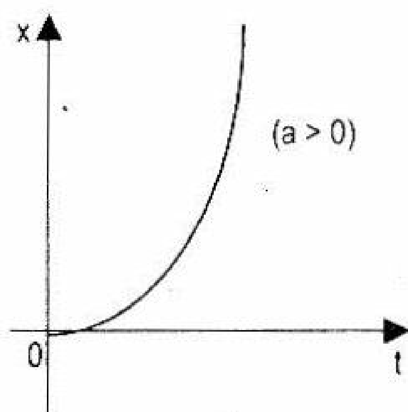
– Đồ thị tọa độ theo thời gian :

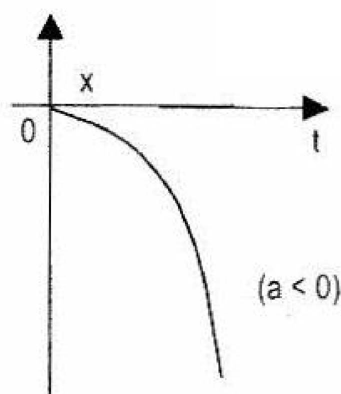
Đồ thị parabol:

+ Có gốc ứng với $v = 0$

+ Giới hạn bởi điểm $(t_0; x_0)$

Trong trường hợp đơn giản : $x = \frac{1}{2}at^2$, ta có:





VI. Đổi hệ quy chiếu :

– Công thức cộng vận tốc : $\overrightarrow{v_{13}} = \overrightarrow{v_{12}} + \overrightarrow{v_{23}}$

– Công thức cộng gia tốc : $\overrightarrow{a_{13}} = \overrightarrow{a_{12}} + \overrightarrow{a_{23}}$

SỰ RƠI TỰ DO

I. Tính chất của chuyển động rơi tự do :

– Rơi tự do (không vận tốc đầu) là chuyển động nhanh dần đều

– Gia tốc rơi tự do (Gia tốc trọng lực)

$\vec{a} = \vec{g}$
- Phương : thẳng đứng
- Chiều : hướng xuống
- Độ lớn : $g = 9{,}81\,m/s^2$ (giá trị trung bình).

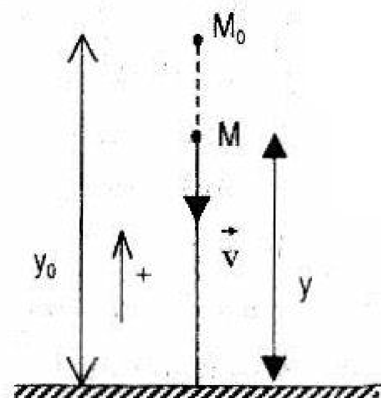
II. Các phương trình :

1. Về độ cao :

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0$$

$$v = -gt$$

$$v^2 = -2g(y - y_0).$$

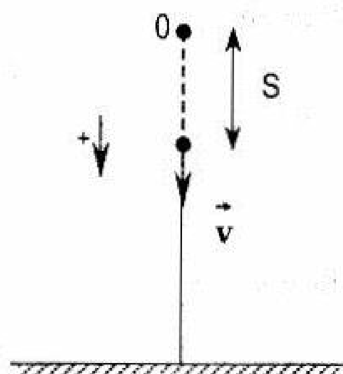


2. Về quãng đường rơi :

$$s = -\frac{1}{2}gt^2$$

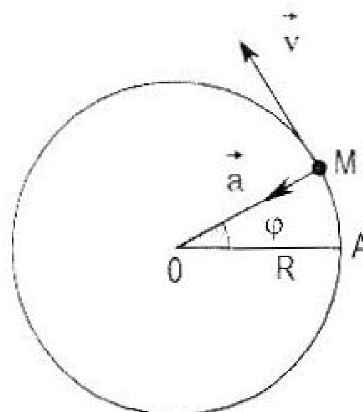
$$v = gt$$

$$v^2 = 2gs.$$



CHUYỂN ĐỘNG TRÒN ĐỀU

I. Tọa độ cong – tọa độ góc :



– Tọa độ cong : $s = \overset{\frown}{AM}$

– Tọa độ góc : $\varphi = (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OM})$

– Hệ thức liên lạc : $s = R\varphi$

II. Vận tốc dài – vận tốc góc :

– Vận tốc dài : $v = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = const$

– Vận tốc góc : $\omega = \dfrac{\varphi}{t}$

– Hệ thức liên lạc : $v = R\omega$.

III. Chu kỳ quay – tần số :

– Chu kỳ : $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{1}{n}$ (n : số vòng quay/giây)

– Tần số : $f = \dfrac{1}{R} = n$

Ghi chú : Vận tốc quay có thể diễn tả bằng tần số (số vòng quay trong mỗi giây) f = n.

Suy ra : $\omega = 2\pi n$.

IV. Gia tốc trong chuyển động tròn đều

Chuyển động tròn đều luôn có gia tốc :

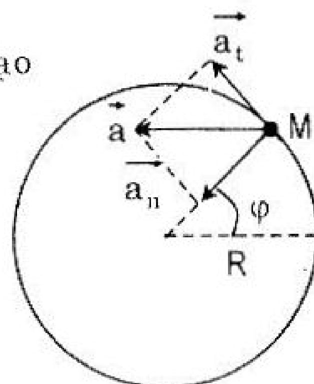
$\vec{a}$ • hướng tâm
• Có độ lớn : $a = \dfrac{v^2}{R} = R\omega^2 = const$.

CHUYỂN ĐỘNG TRÒN BIẾN ĐỔI ĐỀU

I. Gia tốc chuyển động tròn bất kỳ

1. Véc tơ gia tốc

Véc tơ gia tốc $\vec{a}$ luôn hướng vào bề lõm của quỹ đạo



$\vec{a} = \vec{a_t} + \vec{a_n}$

$$\begin{cases} \vec{a_t} = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}. \\ \vec{a_n} = \dfrac{v^2}{R} \end{cases}$$

2. *Gia tốc góc:*

– Ta có : $\alpha = \dfrac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$ (rad/s^2)

– Suy ra : $\alpha = 0$. : Chuyển động tròn đều

α = const : Chuyển động tròn biến đổi đều

α biến thiên : Chuyển động tròn biến đổi không đều.

II. Các phương trình của chuyển động tròn biến đổi đều :

1. *Các phương trình về đại lượng theo chiều dài :*

a_t = const

$v = a_t t + v_0$

$s = \dfrac{1}{2} a_t t^2 + v_0 t + s_0$

$v^2 - v_0^2 = 2a_t(s - s_0)$

Ghi chú : $a_t.v_0 > 0$: Chuyển động tròn nhanh dần đều

$a_t.v_0 < 0$: Chuyển động tròn chậm dần đều.

2. *Các phương trình về đại lượng góc :*

α = const

$\omega = at + \omega_0$

$\varphi = \dfrac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$

$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\varphi - \varphi_0)$

Ghi chú : * $\alpha\omega_0 > 0$: Chuyển động tròn nhanh dần đều

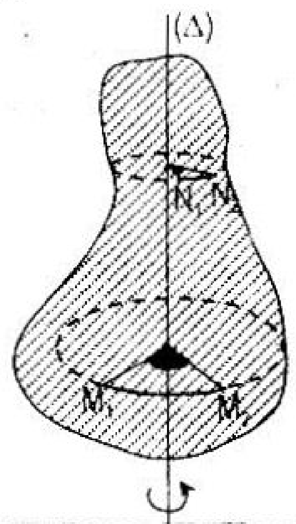
* $\alpha\omega_0 < 0$: Chuyển động tròn chậm dần đều

III. Áp dụng vào chuyển động quay của vật rắn quanh một trục

– Quỹ đạo của các điểm ngoài trục quay là những đường tròn đồng trục

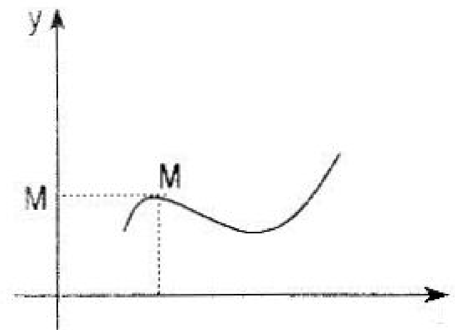
– Vận tốc góc của các điểm ngoài trục quay đều bằng nhau.

– Vận tốc dài của các điểm tùy thuộc bán kính quỹ đạo tròn.



KHẢO SÁT CHUYỂN ĐỘNG BẰNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ

I. Nguyên tắc :



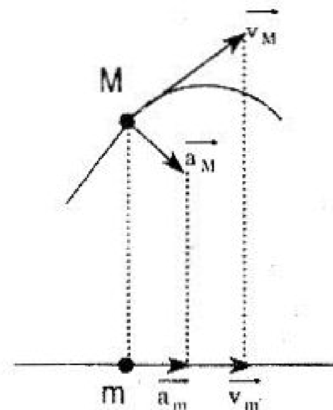
- Hình chiếu của vật M trên các trục tọa độ :

  + Chuyển động thẳng

  + Có tính chất của chuyển động độc lập với nhau

- Biết chuyển động của các hình chiếu có thể suy ra chuyển động thực của vật.

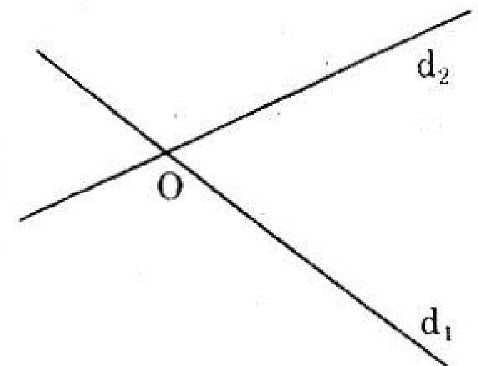
II. Gia tốc và vận tốc của hình chiếu :



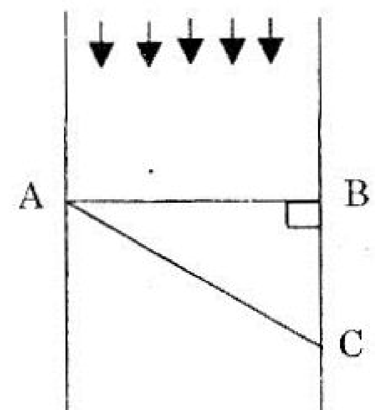
Ta có : $\overrightarrow{a_m} = Ch.(\overrightarrow{a_M})$

$\overrightarrow{v_m} = Ch.(\overrightarrow{v_M})$

II. BÀI TẬP



1.1. Hai đường thẳng d_1 và d_2 tạo với nhau 1 góc $\alpha = 60^0$. Chúng chuyển động theo các vận tốc $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ theo phương vuông góc với chính nó. Tìm vận tốc của giao điểm O, nếu $v_1 = 4\frac{m}{s}$, $v_2 = 3\frac{m}{s}$.



1.2. Dòng sông có 2 bờ song song, nước chảy với vận tốc không đổi u. Một ca nô có công suất không đổi khi hướng mũi vuông góc với bờ thì đi theo đường AC lệch về phía hạ nguồn góc $\widehat{BAC} = 30^0$, thời gian sang sông là 100 (s). Hỏi:

a. Muốn sang ngang theo quỹ đạo AB thì phải hướng mũi ca nô theo phía nào? thời gian sang sông là bao nhiêu?

b. Muốn trở về theo quỹ đạo CA thì phải hướng mũi ca nô như thế nào? thời gian sang sông là bao nhiêu ?

1.3. Một đoàn vận động viên chạy đều với vận tốc $v_1 = 1\frac{m}{s}$, họ cách đều nhau. Chiều dài của đoàn là L = 20 (m). Huấn luyện viên chạy ngược

lại. Khi gặp huấn luyện viên thì vận động viên quay lại chạy theo vận tốc của huấn luyện viên, $v_2 = \frac{2}{3}\frac{m}{s}$.

Sau lúc tất cả cùng chạy về với huấn luyện viên thì chiều dài của đoàn là L'. Tính L'.

1.4. Ô tô đang chạy trên đường thẳng với vận tốc 30 km/h. Phía sau ô tô là một gương phẳng thẳng đứng. Xe máy đuổi theo ô tô, với vận tốc 40 km/h.

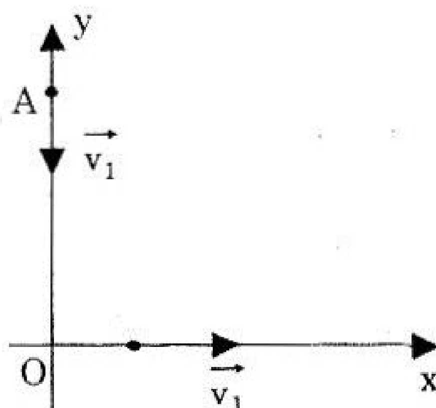
Tính vận tốc của ảnh xe máy trong gương soi, so với :

a. Ô tô.

b. Xe máy.

c. Một cột điện bên đường.

1.5. Hai chấm điểm A và B chuyển động theo hai phương vuông góc nhau. Ban đầu A cách O_1 đoạn 40m, chuyển động đều về phía O với vận tốc v_1=4m/s, cùng lúc đó B cách O_1 đoạn OB = 10m, chuyển động đều ra xa với vận tốc $v_2 = 3\frac{m}{s}$.



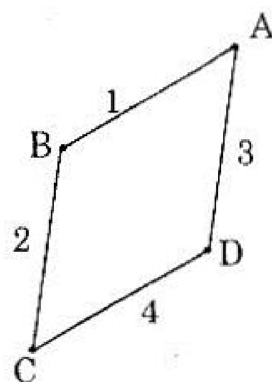
Tìm khoảng cách ngắn nhất giữa 2 chất điểm trong quá trình chuyển động, bằng 2 phương pháp khác nhau:

a. Phương pháp tọa độ

b. Phương pháp dùng vận tốc tương đối.

1.6. Chất điểm trượt không ma sát từ A đến C.

ABCD là hình thoi, hỏi trượt theo đường ABC hay ADC hết thời gian ít hơn.



1.7. Một đoàn đầu tàu (có thể coi là chất điểm) chuyển động thẳng đều và cách đều nhau.

Một nhân viên đường sắt chuyển động dọc đường sắt.

Khi đi ngược chiều thì cứ 3 phút gặp 1 đầu tàu

Khi đi cùng chiều thì cứ 7 phút gặp 1 tàu vượt anh ta. Hỏi nếu anh ta đứng yên thì cứ mấy phút có 1 tàu đi qua trước mặt?

1.8. Trên dòng sông, nước chảy đều với vận tốc U.

Một vận động viên thả quả bóng, rồi bơi ngược dòng. 10 phút sau đó, quay lại và bơi theo quả bóng, gặp quả bóng cách chỗ thả 400m.

Tìm vận tốc của dòng nước.

1.9. Bốn chú rùa đuổi nhau. A đuổi B, B đuổi C, C đuổi D, D đuổi A. Chúng có cùng vận tốc V, lúc T = 0 chúng ở trên 4 đỉnh của hình vuông cạnh a... Hỏi chúng có gặp nhau hay không ? Sau bao lâu chúng gặp nhau.

1.10. Một chuyển động mà trong giây thứ 1 đi được 1 (m) giây thứ 2 đi được 2 (m), giây thứ 3 đi được 3 (m)... giây thứ n di được n(m). Có phải chuyển động nhanh dần đều hay không ?

1.11. Tìm vận tốc ban đầu và gia tốc của một chuyển động biến đổi đều. Cho biết, giây đầu tiên đi được 9,5m, giây cuối cùng (trước lúc dừng hẳn) đi được 0,5m.

1.12. Các giọt nước, tách ra khỏi mái nhà một cách đều đặn và cùng rơi tự do. Đúng lúc giọt 1 tiếp đất thì giọt thứ 5 bắt đầu rơi, và khoảng cách giữa giọt 2 và giọt 3 là 2,5m.

Tìm chiều cao của mái nhà.

1.13. Một nhân viên đường sắt đứng cạnh đường sắt quan sát một đoàn tàu đang chuyển động chậm dần đều vào ga. Các toa có cùng chiều dài là l, bỏ qua chiều dài đoạn nối giữa 2 toa.

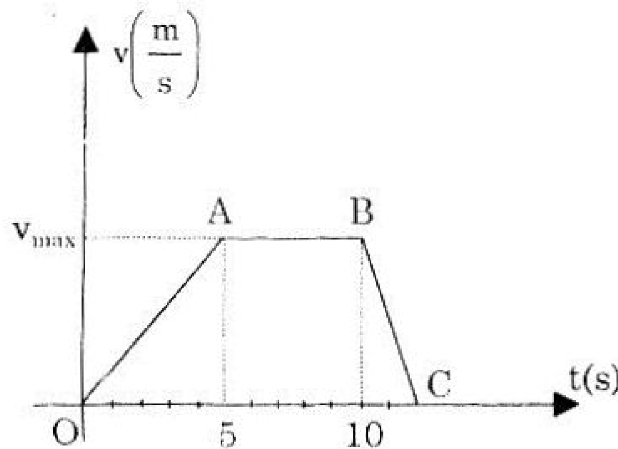
Toa thứ nhất đi qua trước mặt anh ta mất 20 giây, toa thứ hai mất 25 giây. Hỏi thời gian toa thứ 3 vượt qua là bao nhiêu?

1.14. Cho một chuyển động biến đổi đều có vận tốc ban đầu v_0, gia tốc a.

a. Tìm quãng đường đi được trong giây thứ n.

b. Tìm thời gian đi mét thứ n

1.15. Chất điểm chuyển động xuất phát từ gốc tọa độ, có đồ thị vận tốc như hình vẽ.



Trong suốt quá trình, vận tốc trung bình là $9\,\frac{m}{s}$.

Nêu tính chất chuyển động và viết phương trình tọa độ thời gian của nó.

1.16. Từ mặt đất, một vật được ném lên theo phương thẳng đứng với vận tốc ban đầu v_0. Bỏ qua lực cản của không khí.

1. Viết phương trình chuyển động

2. Tính thời gian đi và về

3. Tìm độ cao của đất

4. Chứng minh rằng ở cùng một độ cao, vận tốc qua đi lúc đi và lúc về có cùng độ lớn.

5. Tìm vận tốc tiếp đất của vật lúc trở về.

1.17. Một chiếc thang máy đặc biệt có khoảng cách từ trần đến sàn là h = 6m, đang chuyển động nhanh dần đều từ dưới lên với gia tốc $a = 2\frac{m}{s^2}$. Đúng lúc có vận tốc $v_0 = 2\frac{m}{s}$ thì chiếc đinh tách từ trần rơi về phía sàn.

1. Sau bao lâu thì đinh chạm sàn

2. Trong thời gian đó, đinh dịch được một đoạn bao nhiêu ? và vạch được một đường đi tổng cộng là bao nhiêu ?

3. Trong thời gian đó, thang máy đi được một đoạn bao nhiêu ? (lấy $g = 10m/s^2$).

1.18. Tìm các thời điểm trong ngày mà :

a) Kim giờ và kim phút trùng nhau.

b) Kim giờ và kim phút thẳng hàng.

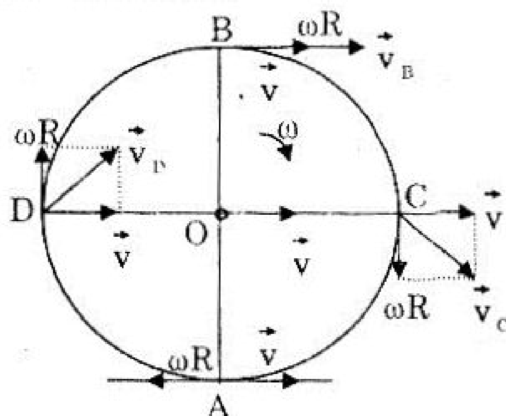
c) Kim giờ và kim phút vuông góc.

Giả thiết rằng chúng quay đều và có chung trục quay.

1.19. Bánh xe lăn không trượt trên mặt đường nằm ngang vận tốc của tâm O là $\vec{V}$

1. Chứng minh rằng V = ωR, trong đó ω là vận tốc góc và R là bán kính vành ngoài của bánh xe.

2. Tìm vận tốc các điểm A, B, C, D.

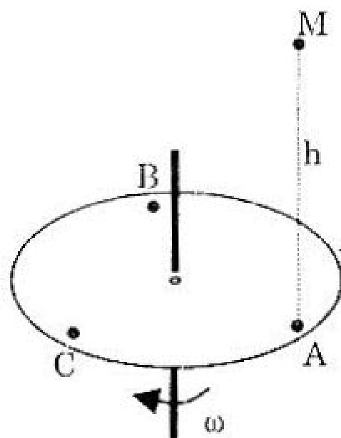


1.20. Hai người đấu súng ở trên một bàn quay đều với vận tốc góc ω. Một ở tâm và một ở cách tâm 1 đoạn R, giả sử hai người dùng cùng một loại súng, đạn được coi là thẳng đều.

1. Mỗi người phải ngắm như thế nào để bắn trúng đối thủ.

2. Ai có lợi thế hơn? giải thích?

1.21. Một đĩa quay đều với vận tốc góc ω trên đĩa có 3 lỗ thủng A, B, C, cách đều trục quay và lệch nhau một góc 2π/3. Từ điểm M ở độ cao MA = h các giọt nước được thách ra một cách đều đặn và rơi tự do. Khi giọt này chạm đĩa thì giọt sau bắt đầu rơi, bỏ qua lực cản không khí, lực đẩy Asimet của không khí. Giọt nước nhỏ, để rơi lọt vào các lỗ.



a) Tìm vận tốc góc của đĩa để cho các giọt nước chỉ rơi vào 1 lỗ nhất định.

b) Tìm vận tốc góc của đĩa để các giọt nước rơi theo thứ tự A, B, C, A, B, C... mà không rơi ra ngoài.

c) Tìm vận tốc góc của đĩa để các giọt nước rơi theo thứ tự ngược lại, qua A, C, B, A, C, B...

1.22. Vệ tinh địa tĩnh là vệ tinh mà từ trên mặt đất ta quan sát thấy nó đứng yên trên bầu trời.

Hỏi nó chuyển động theo quỹ đạo như thế nào.

Tìm độ cao của nó so với mặt đất.

Tìm vận tốc dài của nó so với trục quả đất.

1.23. Hai học sinh ném bóng cho nhau. Giả sử điểm ném bóng và điểm bắt bóng có cùng độ cao. Bỏ qua lực cản của không khí. Thời gian chuyển động là 1 (s).

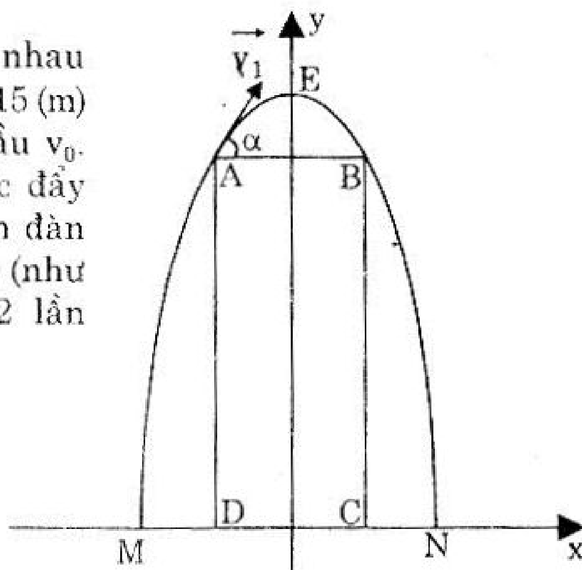
Tìm độ cao cực đại của quĩ đạo, lấy mốc là điểm ném bóng.

1.24. Một khối chướng ngại vật có tiết diện thẳng là ABCD. AB = 8m; BC = 20m. Từ mặt đất phải ném lên một vật với vận tốc ban đầu nhỏ nhất, để vừa đủ vượt qua khối này.

a) Viết phương trình quỹ đạo.

b) Tìm vị trí ném.

1.25. Hai bức tường thẳng đứng cách nhau AC = BD = 10m từ độ cao A, với AB = 15 (m) ta ném ngang 1 vật với vận tốc đầu v_0. Bỏ qua lực cản của không khí, lực đẩy Acsimet, giả sử va chạm hoàn toàn đàn hồi và tuân theo định luật phản xạ (như phản xạ từ gương phẳng). Sau 2 lần phản xạ vật đi vào điểm D.



a) Tính $\overrightarrow{v_0}$.

b) Tính $\overrightarrow{v_0}$ tại điểm D.

1.26. Con tàu chạy dọc theo xích đạo về hướng đông với vận tốc v_0 = 30 km/h. Một luồng gió có vận tốc v = 15 km/h thổi đến từ hướng Đông – Nam theo phương hợp với xích đạo một góc $\varphi = 60^0$. Hãy xác định vận tốc v' của luồng gió và góc φ' giữa hướng gió và xích đạo trong hệ quy chiếu gắn với con tàu.

1.27*. Một thước kẻ có hai đầu A, B trượt theo hai thanh định hướng Ox, Oy vuông góc với nhau. Đầu B của thước kẻ chuyển động với vận tốc v không đổi dọc theo Oy. Hãy tìm vận tốc và gia tốc chuyển động của điểm M trên thước kẻ, nếu MA = m; MB = n và đầu B bắt đầu chuyển động từ điểm O.

1.28. Một ôtô chuyển động thẳng nhanh dần đều đi qua hai điểm A, B cách nhau 20 m trong thời gian t = 2 s. Vận tốc của ô tô khi đi qua điểm B là 12 m/s. Tìm:

a) Gia tốc và vận tốc của ô tô khi đi qua điểm A.

b) Quãng đường ô tô đã đi được từ điểm khởi hành đến điểm A.

1.29*. Một viên đạn xuyên qua một tấm ván chiều dày h có vận tốc giảm từ v_0 đến v. Tìm thời gian chuyển động của viên đạn trong tấm ván, biết rằng lực cản của tấm ván tỷ lệ với bình phương vận tốc của viên đạn.

1.30. Hai vật được ném đi đồng thời từ một điểm với cùng vận tốc v = 25 m/s. Vật thứ nhất được ném thẳng đứng lên trên và vật thứ hai được ném nghiêng dưới góc $\theta = 60^0$ so với phương nằm ngang. Xác định khoảng cách giữa hai vật sau t = 1,70s, bỏ qua sức cản của không khí.

1.31. Hai hạt 1 và 2 chuyển động đều với vận tốc v_1 và v_2 dọc theo hai đường thẳng vuông góc với nhau và hướng về giao điểm O của hai đường ấy.

Tại thời điểm t = 0 hai hạt lần lượt ở cách điểm O các khoảng l_1 và l_2.

Sau thời gian bao nhiêu khoảng cách giữa hai hạt là cực tiểu và khoảng cách cực tiểu ấy bằng bao nhiêu ?

1.32. Hai viên đạn lần lượt được bắn lên bởi một súng đại bác với vận tốc v_0 = 250 m/s; một viên bắn dưới góc $\theta_1 = 60^0$ viên kia bắn dưới góc $\theta_2 = 45^0$ (cùng trong một mặt phẳng bắn). Bỏ qua sức cản không khí, hãy xác định khoảng thời gian giữa hai lần bắn để cho hai viên đạn gặp nhau.

1.33. Súng đại bác và mục tiêu đặt ở cùng độ cao cách nhau s = 5,10 km. Bỏ qua sức cản không khí, hỏi sau một thời gian bao lâu một viên đạn được bắn lên với vận tốc ban đầu v_0 = 240 m/s đạt đến mục tiêu.

1.34. Trạm ra đa truyền tín hiệu dưới một góc ψ so với mặt nằm ngang và sau thời gian t_1 nhận được tín hiệu phản xạ lại từ một máy bay. Sau thời gian T người ta lại truyền tiếp một tín hiệu nữa dưới một góc φ và

lại thu được tín hiệu phản xạ sau thời gian t_2. Giả thiết rằng máy bay bay thẳng đều ở độ cao h và hướng về phía trạm rada, từ giả thiết $\psi < \varphi < \pi/2$, tìm:

a. Tìm độ cao h.

b. Vận tốc máy bay so với mặt đất.

c. Khoảng cách r_0 của máy bay đến trạm rada tại thời điểm truyền tín hiệu thứ nhất.

d. Thời điểm khi máy bay bay qua trạm.

Có phải tất cả các số hiệu ψ, φ, t_1 và t_2 đều cần thiết cho lời giải bài toán hay không ?

1.35. Giả thiết rằng từ khi bắt đầu chuyển bánh trên đường băng đến khi đạt được vận tốc cuối cùng máy bay siêu âm thực hiện chuyển động nhanh đều với gia tốc a. Sau một thời gian T kể từ khi bắt đầu chuyển bánh cũng tại nơi xuất phát phát ra một tiếng nổ.

a) Cần phải thỏa mãn điều kiện như thế nào để sóng âm đuổi kịp máy bay (bỏ qua các hiệu ứng liên quan đến việc giảm năng lượng của sóng theo chiều tăng khoảng cách) ?

b) Xác định thời gian khi máy bay và sóng âm cùng xuất hiện ở cùng một vị trí không gian.

c) Giải bài toán bằng phương pháp đồ thị. Xét mọi trường hợp có thể xảy ra.

1.36*. Một người đứng tại chỗ có thể ném hòn đá đến một khoảng cách không xa hơn x_0. Có thể rơi xa thêm một khoảng bằng bao nhiêu nếu khi ném người đó đang chạy với vận tốc v theo hướng ném. Để đơn giản tính toán ta bỏ qua sức cản của không khí cũng như chiều cao của người ném.

1.37. Người ta ném thẳng đứng lên trên một vật với vận tốc ban đầu v_1. Sau một thời gian $t_1 < 2v_1/g$ người ta lại ném thẳng đứng lên trên một vật thứ hai nữa với vận tốc ban đầu v_2. Hãy tìm và biện luận:

a) Thời gian t_2, khi hai vật gặp nhau trong không khí,

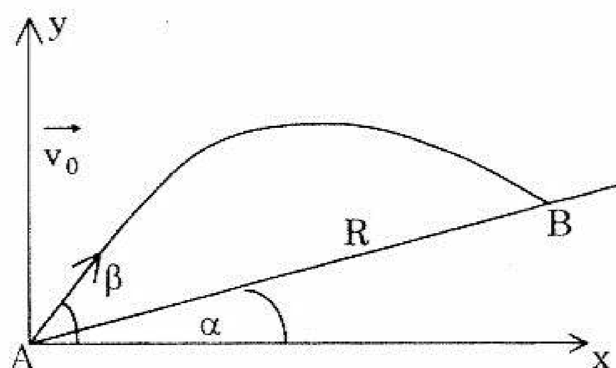
b) Chiều cao nơi hai vật gặp nhau,

c) Thời gian rơi của hai vật trên mặt đất (t_3 và t_4).

1.38. Mặt sườn đồi trên thao trường tạo với phương nằm ngang một góc α. Tại điểm A dưới chân đồi người ta đặt một súng cối. Những viên đạn cối được bắn đi với vận tốc ban đầu v_0 và tạo với phương nằm ngang một góc β (h.1) Bỏ qua sức cản của không khí hãy tìm:

a) Khoảng cách r của viên đạn tới điểm A tại thời điểm t bất kì.

b) Khoảng cách AB = R. Biện luận kết quả thu được.



1.39*. Bán kính véc–tơ của một điểm A biến thiên theo thời gian t tính từ gốc tọa độ theo quy luật $\vec{r} = bt\,\vec{i} - ct^2\,\vec{j}$, trong đó $\vec{i}$ và $\vec{j}$ là các véc–tơ đơn vị trên hai trục x và y, b và c là hai hằng số dương. Hãy xác định:

a) Phương trình quỹ đạo y (x) của điểm đó, vẽ đồ thị của nó.

b) Vận tốc vec–tơ $\vec{v}$, gia tốc $\vec{a}$ và các độ dài của chúng theo thời gian.

c) Góc α giữa các vec–tơ $\vec{v}$ và $\vec{a}$ theo thời gian

d) Véc tơ vận tốc trung bình trong t giây đầu tiên và độ dài của vec tơ ấy.

1.40*. Một điểm chuyển động chậm dần trên đường tròn bán kính R, sao cho tại mỗi điểm các gia tốc tiếp tuyến và pháp tuyến của nó có độ lớn bằng nhau. Tại thời điểm ban đầu t = 0, vận tốc của điểm đó bằng v_0. Hãy xác định:

a) Vận tốc của điểm theo thời gian và theo quãng đường đi S.

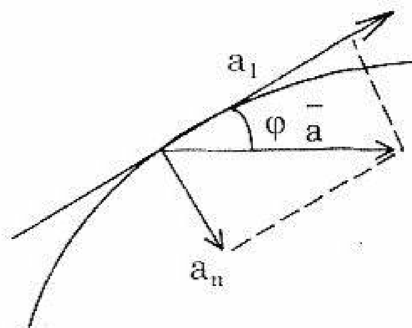
b) Gia tốc toàn phần theo vận tốc và theo quãng đường đi S.

1.41*. Một hạt chuyển động trong mặt phẳng xy với vận tốc $\vec{v} = b\,\vec{i} + cx\,\vec{j}$ trong đó $\vec{i}$ và $\vec{j}$ là các véc tơ đơn vị trên các trục x và y, b và c là các hằng số. Tại thời điểm ban đầu hạt ở vị trí x = y = 0. Hãy xác định:

a) Phương trình quỹ đạo của hạt y (x),

b) Bán kính cong của quỹ đạo theo x.

1.42*. Một con thiêu thân bay theo đường cong, chiều dài của đường cong diễn tả theo công thức $s = s_0\exp(ct)$, ở đây s_0 và c là những hằng số. Biết rằng vec–tơ tiếp tuyến tại mỗi điểm tạo với vec–tơ gia tốc $\vec{a}$ một góc φ không đổi. Tìm các giá trị:



a) Vận tốc.

b) Gia tốc tiếp tuyến.

c) Gia tốc pháp tuyến.

d) Bán kính cong của quỹ đạo như là hàm độ dài của cung đường cong.

1.43*. Một vật chuyển động theo đường cong có phương trình viết dưới dạng tham số như sau:

$$\vec{r} = \vec{r}(q)$$

Đối với mọi giá trị của tham số q tồn tại hệ thức:

$$\vec{r}\,\frac{d\vec{r}}{dq} = 0$$

Chứng minh rằng:

a) $\left|\vec{r}\right| = \text{const.}$

b) Nếu ngoài ra đối với mọi q

$\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = 0$ thì từ đây suy ra $\vec{r} = \text{const.}$

1.44*. Một điểm chuyển động trong mặt phẳng xy theo quy luật $x = b\sin\omega t$. $y = b(1 - \cos\omega t)$ với b và ω là hai hằng số dương. Hãy xác định:

a) Quãng đường đi s của điểm đó sau một thời gian t.

b) Góc giữa véc tơ vận tốc và véc tơ gia tốc của điểm đó.

1.45*. Chuyển động của một vật mô tả bằng các phương trình $x = b\,(e^{ct} + e^{-ct})$, $y = b(e^{ct} - e^{-ct})$. Trong đó $b > 0$ và $c > 0$. Tìm phương trình quỹ đạo và giá trị hướng tâm cực đại.

1.46*. Chuyển động của chất điểm được mô tả bằng các phương trình

a) $\begin{cases} x = a\sin\omega t \\ y = a\sin 2\omega t \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = a\sin\omega t \\ y = a\sin 3\omega t \end{cases}$

Tìm phương trình quỹ đạo. Vẽ quỹ đạo của chất điểm.

1.47*. Lò phản ứng hạt nhân được sử dụng như nguồn nơtron trong nghiên cứu khoa học. Các nơtron trong chùm được sản ra có năng lượng khác nhau. Thường do yêu cầu của nghiên cứu người ta phải tách từ chùm ra các nơtron có cùng năng lượng xác định. Để làm điều đó ta dùng nhiều loại máy tách. Một trong những máy đó là dụng cụ hoạt động như sau: một trục hình trụ bằng thép quay đặt tại cửa kênh dẫn chùm nơtron ra ngoài. Chùm hạt vuông góc đến trục quay. Trong hình trụ người ta khoét một rãnh có dạng bảo đảm cho việc bay qua của các hạt có vận tốc xác định. Những nơtron có các vận tốc khác đập vào thành rãnh sẽ bị hấp thụ.

Rãnh trong trục hình trụ phải có dạng như thế nào để máy tách chỉ cho nơtron có vận tốc v chạy qua? Trục có bán kính R và quay với vận tốc góc ω.

1.48*. Chuyển động của vật mô tả bằng hệ phương trình:

$$x = b\sin\omega t,\ y = c\cos 2\omega t,$$

trong đó b và c là các hằng số dương. Khảo sát chuyển động của vật, tìm phương trình quỹ đạo, xác định giá trị cực đại và cực tiểu của vận tốc và gia tốc của vật tại các điểm quay.

1.49*. Tìm quỹ đạo của chó chạy đuổi theo thỏ với vận tốc v. Thỏ chạy dọc theo đường thẳng. Chó đuổi theo thỏ luôn nhằm theo hướng vị trí của thỏ tại từng thời điểm. Tại thời điểm ban đầu cả hai con vật đều đứng trên đoạn thẳng vuông góc đến quỹ đạo của thỏ, và khoảng cách giữa chúng bằng a = 19m. Nếu vận tốc của thỏ w = 0.9v, thì chó có đuổi kịp thỏ không? Nếu đuổi kịp thì chó chạy được khoảng đường dài bao nhiêu ?

1.50. Một vật rắn quay xung quanh một trục cố định theo quy luật $\varphi = at - bt^3$ với a = 6,0 rad/s; b = 2,0 rad/s^3. Hãy xác định:

a) Giá trị trung bình của vận tốc góc và gia tốc trong khoảng thời gian từ t = 0 đến lúc dừng lại.

b) Gia tốc góc lúc vật rắn dừng lại.

1.51*. Một đĩa mặt tròn bán kính R quay quanh trục thẳng đứng với vận tốc ω. Từ tâm đĩa có một con bọ dừa bò dọc theo bán kính xác định ra ngoài với vận tốc không đổi v_0. Tìm:

a) Phương trình chuyển động và quỹ đạo của bọ dừa trong hệ quy chiếu đứng yên trong tọa độ đề các và tọa độ cực.

b) Sự phụ thuộc của giá trị vectơ vận tốc $\vec{v}$ và các thành phần xuyên tâm v_r và ngang v_φ của nó vào thời gian.

c) Sự phụ thuộc của vectơ gia tốc $\vec{a}$ cùng các thành phần xuyên tâm a_r, ngang a_φ cùng pháp tuyến a_n và tiếp tuyến của nó vào thời gian.

d) Sự phụ thuộc bán kính cong ρ vào thời gian.

e) Chiều dài toàn khoảng đường mà bọ dừa đã bò qua trong hệ quy chiếu không chuyển động.

1.52*. Biết rằng trong thời gian chuyển động của chất điểm P góc giữa phương vectơ bán kính $\vec{r}$ và phương của vận tốc $\vec{v}$ là không đổi. Tìm trong hệ tọa độ cực:

a) Phương trình quỹ đạo của chất điểm.

b) Chiều dài toàn phần của quỹ đạo chuyển động.

Cho các điều kiện ban đầu $\varphi(0) = 0$, $r(0) = r_0$.

Biện luận các kết quả thu được phụ thuộc vào giá trị của góc α.

1.53*. Chuyển động của chất điểm được mô tả bằng hệ phương trình:

$$r = r_0(1 - ct), \qquad r_0 = \text{const}$$

$$\varphi = \frac{ct}{1 - ct}, \qquad c = \text{const}$$

Tìm:

a) Quỹ đạo của điểm.

b) Các thành phần xuyên tâm và ngang của vận tốc và giá trị vận tốc của điểm.

c) Các thành phần xuyên tâm, ngang và giá trị gia tốc của điểm.

1.54*. Tìm quỹ đạo của máy bay siêu âm bay với vận tốc không đổi v trong mặt phẳng đứng xy mà người phi công lái để sao cho tại cùng một thời điểm các bạn của mình đứng trên sân bay đều nghe được tiếng gầm của động cơ từ mọi vị trí của quỹ đạo dội về. Xác định vị trí điểm kết thúc của quỹ đạo. Tại thời điểm t = 0 phi công đang ở nơi các bạn đứng một khoảng bằng r_0 và vectơ $\vec{r_0}$ tạo với mặt sân bay một góc β.

1.55. Một bánh xe quay quanh một trục cố định sao cho góc quay phụ thuộc vào thời gian theo quy luật $\varphi = bt^2$ với $b = 0{,}2\ rad/s^2$. Hãy xác định gia tốc toàn phần của điểm A trên vành bánh xe tại lúc t = 2,5s, biết rằng lúc đó vận tốc tuyến tính của điểm A bằng v = 0,65 m/s.

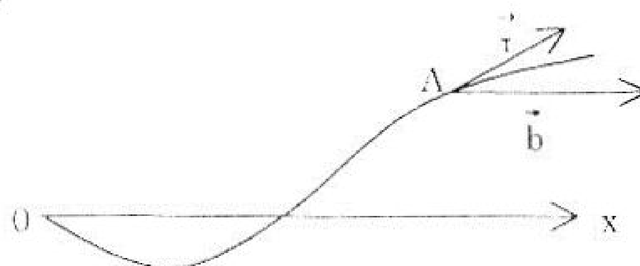
1.56*. Chất điểm bắt đầu chuyển động từ gốc tọa độ sao cho các thành phần vận tốc của nó trong hệ tọa độ cực thay đổi theo thời gian theo quy luật.

$$v_r = a.\, e^{kt},\ v_\varphi = br$$

a, b, k là các hằng số

Hãy xác định định luật chuyển động, phương trình quỹ đạo của chất điểm.

1.57*. Một hạt A vạch một quỹ đạo cho trước với một gia tốc tiếp tuyến $a_t = (\vec{b}\,.\,\vec{\tau})$, trong đó $\vec{b}$ là một véctơ không đổi có phương trùng với trục x và $\vec{\tau}$ là véctơ đơn vị có phương trùng với véctơ vận tốc tại điểm đang xét. Hãy xác định vận tốc hạt theo x, biết rằng tại x = 0 vận tốc đó bằng 0.



1.58*. Một vòng tròn bán kính R lăn không trượt trên mặt phẳng với vận tốc v không đổi.

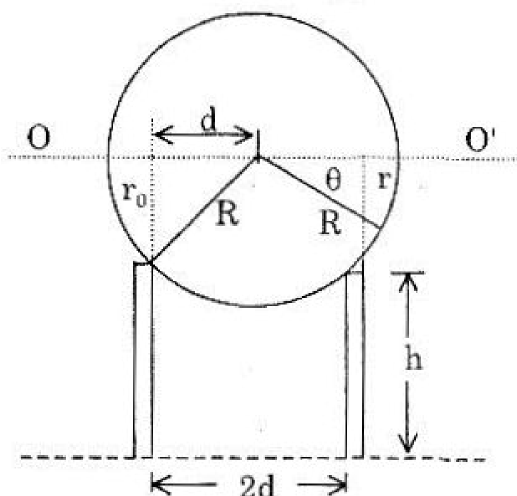
a) Tìm phương trình chuyển động và phương trình quỹ đạo của một điểm bất kỳ trên vòng tròn.

b) Tính khoảng đường s giữa hai lần gặp nhau liên tiếp của điểm khảo sát trên đường lăn của vòng tròn.

c) Tìm gia tốc toàn phần a. Vẽ quỹ đạo của điểm.

1.59*. Một đĩa mặt tròn bán kính R lăn theo đường thẳng Ox. Một điểm trên chu vi của đĩa chuyển động theo cung xycloid (xem bài trên) với vận tốc v không đổi. Tìm chuyển động của tâm đĩa trong khoảng $0 < x < 2\pi R$, biết rằng tại thời điểm $t = \frac{4R}{v}$ tọa độ của điểm đó là: $x = \pi R$, $y = 2R$.

1.60*. Một quả cầu bán kính R lăn đều trên hai mặt thành đứng song song với vận tốc v_0. Khoảng cách giữa hai thành là 2d và chiều cao là h, cạnh đó $0 < d < R < h$



Tìm:

a) phương trình chuyển động

b) phương trình quỹ đạo

c) bán kính cong của quỹ đạo

Cho một điểm nằm trên mặt quả cầu. Biện luận các trường hợp riêng. Vẽ quỹ đạo của điểm.

1.61*. Một vật chuyển động phẳng với vận tốc mặt $s = \frac{1}{2}ar$, nhưng với vận tốc bán kính $v_r = b$, ở đây a và b là những hằng số dương. Tìm phương trình chuyển động và phương trình quỹ đạo của vật trong hệ tọa độ cực. Tại thời điểm ban đầu $\varphi(0) = 0$, $r(0) = r_0$.

1.62*. Tìm phương trình chuyển động của chất điểm chuyển động theo vòng tròn bán kính r_0, nếu góc giữa véc tơ gia tốc $\vec{a}$ và véc tơ bán kính $\vec{r}$ của điểm có giá trị không đổi α. Biện luận kết quả thu được tùy thuộc vào giá trị góc α. Các điều kiện ban đầu $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = \omega_0$.

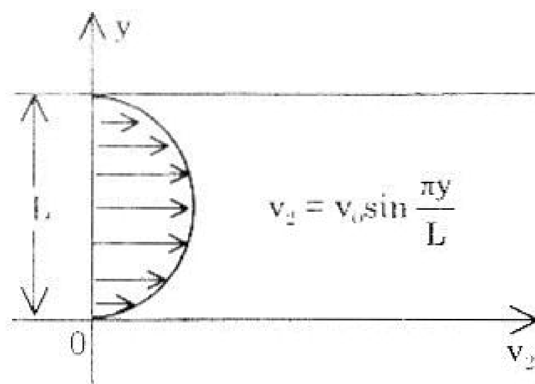
1.63*. Vật chuyển động theo vòng tròn bán kính r với gia tốc tiếp tuyến $a_t = const$. Tại thời điểm ban đầu vật nằm tại điểm A và vận tốc của nó bằng không. Tìm:

a) Giá trị thành phần pháp tuyến của gia tốc a_n.

b) Giá trị véctơ gia tốc $\vec{a}$ và góc tạo thành của nó với véctơ bán kính của vật.

c) Điểm B, tại đấy giá trị của gia tốc tiếp tuyến a_t bằng gia tốc pháp tuyến a_n.

1.64*. Chiếc thuyền bơi qua sông theo phương vuông góc đến dòng chảy với vận tốc v_1 không đổi. Tại mọi nơi dòng chảy luôn luôn song song với đôi bờ, nhưng giá trị vận tốc của nó phụ thuộc vào khoảng cách đến bờ, được diễn tả theo công thức:



$v_2 = v_0 \sin \frac{\pi y}{L}$, ở đây v_0, L – là hằng số (L – là chiều rộng của con sông).

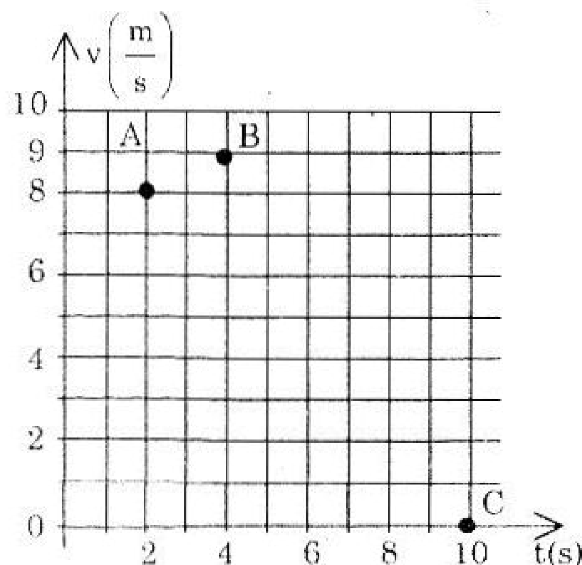
Tìm:

a) Giá trị véc tơ vận tốc con thuyền tính theo bờ không chuyển động.

b) Dạng quỹ đạo con thuyền.

1.65*. Một thanh AO có chiều dài r quay quanh điểm O với vận tốc góc ω không đổi. Tại điểm A người ta nối một thanh khác có chiều dài l và điểm đầu mút B còn lại có thể chuyển động tự do trên đường OX (l > r). Tìm vị trí và vận tốc điểm B như những hàm phụ thuộc vào thời gian.

1.66*. Hình bên trình bày kết quả ba phép đo vận tốc của một vật phụ thuộc vào thời gian. Biết rằng vật chuyển động thẳng và sau 10 giây thì dừng lại (tức v = 0 tại điểm C và sự phụ thuộc v(t) là phụ thuộc parabôn.



a) Tìm dạng giải tích v(t).

b) Tìm vận tốc ban đầu $v(0) = v_0$.

c) Tìm vận tốc cực đại và thời gian khi vật đạt được vận tốc đó.

d) Vẽ đồ thị v(t)

e) Tính chiều dài khoảng đường mà vật đi được giữa giây thứ hai và thứ tư của chuyển động.

1.67*. Chuyển động của điểm trong không gian được diễn tả bằng hệ phương trình:

$$x = b.t$$

$$y = c.t$$

$$z = d.t^2$$

Ở đây b, c, d là những hằng số dương

a) Tìm và vẽ quỹ đạo của điểm.

b) Tìm giá trị vận tốc khi điểm đó rời xa khỏi gốc hệ tọa độ.

1.68*. Khảo sát chuyển động của chất điểm dọc theo một nhánh parabôn có phương trình $y^2 = 2px$. Chuyển động của hạt luôn có thành phần chiếu không đổi v_0 của véc tơ vận tốc lên phương tiếp tuyến đến đỉnh parabôn. Tìm:

a) phương trình chuyển động của hạt,

b) véc tơ vận tốc và giá trị của nó,

c) véc tơ gia tốc và giá trị của nó,

d) các thành phần tiếp tuyến và pháp tuyến của véc tơ gia tốc,

e) bán kính cong của điểm phụ thuộc vào thời gian.

Công nhận các điều kiện ban đầu: $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.

1.69*. Chất điểm chuyển động theo hình êlip có phương trình $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Biết rằng $x = 0$, tìm y và y như là hàm của x và vị trí của điểm bằng phương pháp vi phân phương trình quỹ đạo của chất điểm.

1.70*. Quả cầu bán kính R lăn đều trên mặt phẳng. Tại một thời điểm nào đó lăn đúng vào một khe hình nêm có góc mở α. Tìm phương trình đường cong chuyển động của tâm quả cầu.

1.71*. Các đầu mút của một thanh gỗ AB chiều dài l trượt không ma sát theo tường và sàn nhà (vuông góc nhau). Giả thiết rằng đầu A (h.7) chuyển động với vận tốc v_0 không đổi, tìm quỹ đạo của một điểm M bất kỳ nằm trên thanh đó, biện luận các trường hợp riêng. Các điều kiện ban đầu: $x_A(0) = 0$, $y_A(0) = a$.

1.72*. Giả sử điểm B của thanh gỗ từ bài toán trên chuyển động với gia tốc không đổi $a > 0$, tìm:

a) chuyển động của điểm M bất kỳ trên thanh.

b) giá trị vận tốc của điểm M bất kỳ theo hàm của thời gian.

Các điều kiện ban đầu: $x_B(0) = b$, $x_B(0) = 0$. Xét các trường hợp riêng.

1.73*. Tâm điểm một thanh gỗ chiều dài 2l chuyển động dọc theo trục y với vận tốc không đổi v_0 và một đầu của nó trượt dọc theo trục x. Tìm phương trình quỹ đạo, đồng thời xác định giá trị vận tốc và gia tốc đầu thứ hai của thanh gỗ. Tại thời điểm ban đầu thanh gỗ đặt thẳng đứng.

1.74*. Trong toa tàu chuyển động với vận tốc không đổi v, một hành khách đánh rơi ra bên ngoài cửa sổ một vật. Viết phương trình quỹ đạo của vật đó trong hệ gắn với:

a) toa tàu;

b) mặt đất;

c) với một con tàu khác di ngược chiều cùng vận tốc với toa tàu trên.

1.75*. Quỹ đạo của một chất điểm là một đường cong khép kín. Trong hệ quy chiếu quán tính bất kỳ khác, quỹ đạo chuyển động của điểm đó có còn đóng kín không ?

1.76*. Một vật trượt không ma sát trên mặt phẳng dốc tạo với mặt phẳng nằm ngang một góc dốc α. Tìm phương trình quỹ đạo của vật trong hệ quy chiếu U' thực hiện chuyển động ngang đều với vận tốc u.

1.77*. Người ta ném hòn đá theo hướng Tây dưới một góc α so với phương nằm ngang. Hãy tìm hệ quy chiếu, trong đó hòn đá chuyển động theo hướng Đông và có tầm xa đạt gấp đôi so với trường hợp trên.

1.78*. Người ta ném một vật theo phương nằm ngang với vận tốc ban đầu v. Hãy tìm hệ quy chiếu (phi quán tính), trong đó vật với vận tốc không đổi chuyển động xuống dần dọc theo đường thẳng với độ dốc bằng $\frac{\pi}{4}$.

1.79*. Trong thời gian đại chiến thế giới lần II phát xít Đức đã bắn phá Luân Đôn bằng bom bay V – 2, bom bay đạt tầm xa s = 300 km và bị lệch khỏi mục tiêu x = 3.700 m. Giả thiết bom bay bay với vận tốc không đổi và hướng dọc kinh tuyến. Tìm thời gian bay. Biết rằng vĩ độ Luân Đôn $\varphi = 52^0$ và chu kỳ quay quả đất $T \approx = 86.000$ s.

1.80*. Nhà điền kinh chạy thi trên một khoảng đường S trong thời gian t. Giả thiết rằng vị trí tổ chức thi nằm trên vĩ tuyến φ và quãng đường thi tạo một góc $\theta = 0$ với mặt phẳng kinh tuyến quả Đất, tìm:

a) Gia tốc Coviolis tác dụng lên nhà điền kinh.

b) Độ lệch so với phương vận tốc ban đầu đo tại đích cuộc thi. Cho biết S = 100m, t = 10s, $\varphi = 30^0$, T = 86.000 s.

1.81*. Tìm độ lệch về phía Đông x của một vật rơi từ đỉnh một ngọn tháp chiều cao h trong trọng trường quả Đất. Biện luận kết quả thu được theo vĩ độ nơi có ngọn tháp.

PHẦN 2 – ĐỘNG LỰC HỌC

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

CÁC ĐỊNH LUẬT VỀ CHUYỂN ĐỘNG

I. Lực – Cân bằng lực :

- Khi vật chuyển động có gia tốc, ta nói có lực tác dụng lên vật.
- Lực và đại lượng véc tơ. Véctơ lực có hướng là hướng của gia tốc do lực truyền cho vật.
- Khi các lực đồng thời tác dụng gây các gia tốc khử lẫn nhau, các lực gọi là cân bằng nhau.

II. Các định luật Newton :

1. Định luật I : $\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$

2. Định luật II : $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m}$

Đơn vị : m : (kg)

a : (m/s^2)

F : (N)

3. Định luật III : $\overrightarrow{F_{21}} = -\overrightarrow{F_{12}}$

Ghi chú :

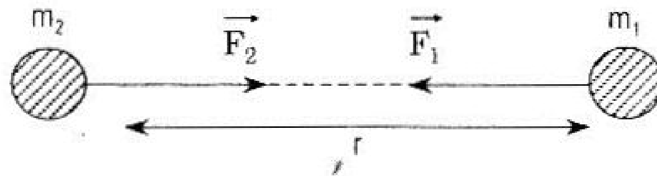
- Hệ quy chiếu trong đó các định luật Newton nghiệm đúng gọi là hệ quy chiếu quán tính.
- Một cách gần đúng, hệ số quy chiếu gắn với Trái Đất có thể coi là hệ quy chiếu quán tính.

III. Khối lượng :

- Đại lượng đặc trưng cho mức quán tính của vật. Khối lượng là đại lượng vô hướng dương, cộng được và bất biến đối với mỗi vật (trong phạm vi cơ học cổ điển).
- Đo khối lượng bằng tương tác hay bằng phép cân.
- Khối lượng riêng : $D = \dfrac{m}{V}$ (kg/m^3).

CÁC LỰC CƠ HỌC

I. Lực hấp dẫn :



1. ***Trường hợp tổng quát :*** $F = G.\dfrac{m_1.m_2}{r^2}$ (G: hằng số hấp dẫn)

Ghi chú :

- Lực hấp dẫn là lực hút.
- Công thức trên chỉ đúng với các chất điểm hoặc với các vật hình cầu có khối lượng phân bố đều.
- Trọng lực :khối lượng phân bố đều.

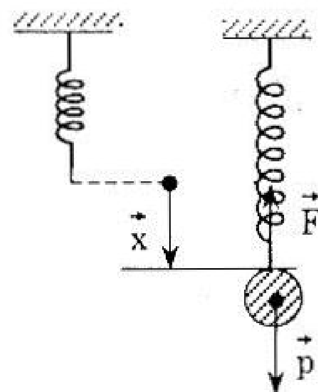
2. ***Trọng lực :*** $P = mg = G\dfrac{mM}{r^2}$ (M: khối lượng Trái Đất)

Biểu thức của gia tốc trọng lực :

* Ở sát mặt đất : $g_0 = G\dfrac{M}{R^2}$

* Ở độ cao h từ mặt đất: $g = G\dfrac{M}{(R+h)^2}$ (R: bán kính Trái Đất).

II. Lực đàn hồi :



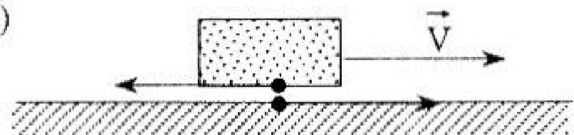
$\vec{F} = -k\vec{x}$

(k : hệ số đàn hồi hay độ cứng).

III. Lực ma sát :

1. Lực ma sát trượt (ma sát động) :

$F_{ms} = kN$ (k: hệ số ma sát trượt)



2. Lực ma sát nghỉ (ma sát tĩnh)

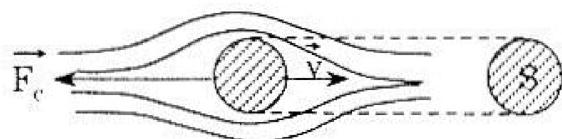
$F_t < kN$: $F_{ms} = F_t$

$F_t \geq kN$: $F_{ms} = kN$ (F_t: ngoại lực tiếp tuyến).

IV. Lực cản của môi trường :

v nhỏ : $F_c = k_1Sv$

v lớn : $F_c = k_2Sv^2$.



PHƯƠNG PHÁP ĐỘNG LỰC HỌC

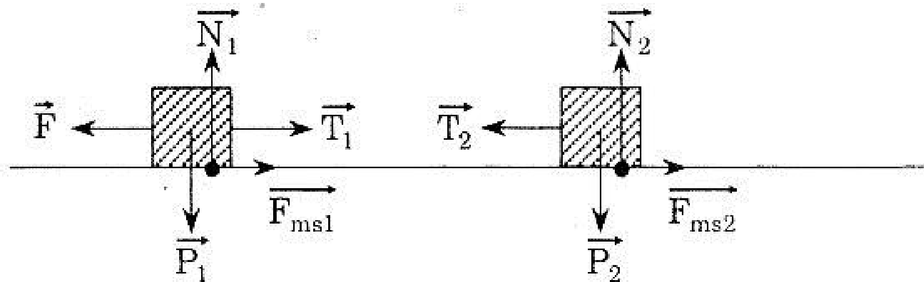
1. Phương pháp động lực học :

Hệ thống và tổng quát hóa việc vận dụng các định luật cơ học.

- Chọn hệ quy chiếu thích hợp. Xác định các dữ liệu và các yêu cầu.
- Phân tích các lực tác dụng. Viết phương trình định luật II Newton.
- Chiếu lên các trục tọa độ để thiết lập các phương trình đại số.
- Tìm ẩn của bài toán:
  - Nếu biết các lực, ta tính được các đại lượng động học (bài toán thuận)
  - Nếu biết chuyển động, ta định được các lực tác dụng (bài toán nghịch).

2. Hai trường hợp đặc biệt :

2.1. Chuyển động của hệ vật :



- Hai loại lực :
  - Ngoại lực : lực do vật bên ngoài tác dụng lên các vật của hệ
  - Nội lực : lực tương tác giữa các vật của hệ.
- Nếu các vật của hệ có cùng gia tốc: $\sum \vec{F}_{ngoại} = \left(\sum m\right)\vec{a}$
- Nội lực không gây gia tốc cho toàn thể hệ .

2.2. Sự tăng giảm, mất trọng lượng :

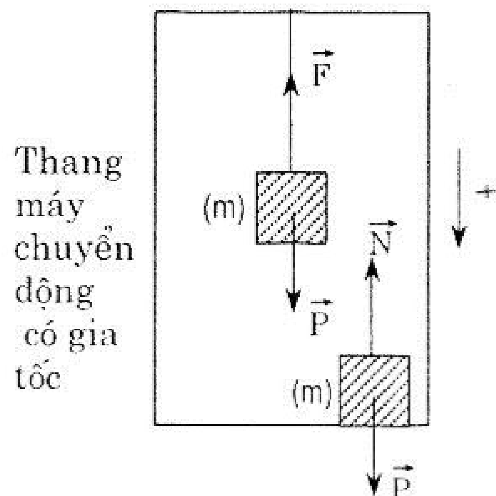
- Ta có : F = N = P – ma

  (F = N : trọng lượng)
- Tùy giá trị của a, có thể có :

  F > P : tăng trọng lượng

  F < P : giảm trọng lượng

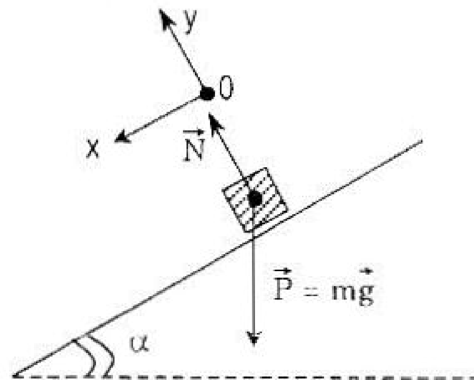
  F = 0 : mất trọng lượng



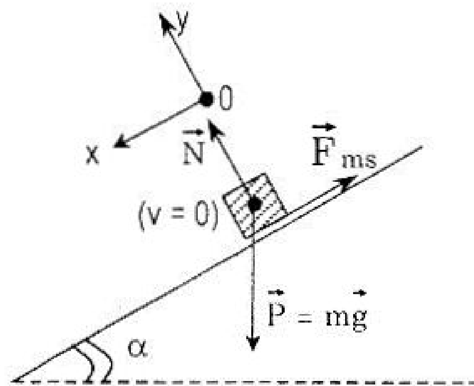
CHUYỂN ĐỘNG TRÊN MẶT PHẲNG NGHIÊNG

I. Trường hợp mặt phẳng nghiêng không ma sát

Gia tốc của chuyển động : $a = g.\sin\alpha$



2. Trường hợp phẳng nghiêng có ma sát :



2.1. Vật nằm yên hoặc chuyển động thẳng đều :

Điều kiện : $tg\alpha < k$ (k : hệ số ma sát trượt).

2.2. Vật trượt xuống theo mặt phẳng nghiêng:

Gia tốc của chuyển động : $a = g(\sin\alpha - k.\cos\alpha)$.

2.3. Vật trượt lên theo mặt phẳng nghiêng (do có vận tốc đầu) :

Gia tốc của chuyển động : $a = -g(\sin\alpha + k.\cos\alpha)$.

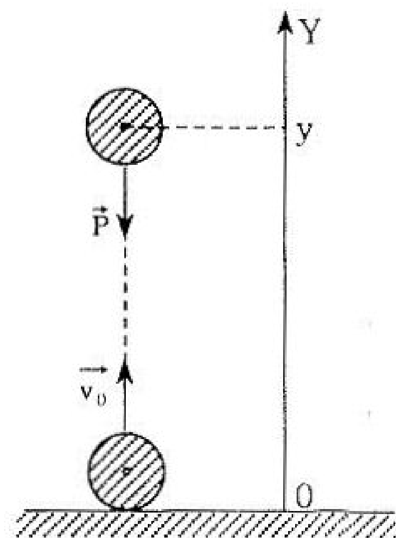
CHUYỂN ĐỘNG CỦA VẬT CÓ VẬN TỐC ĐẦU VÀ CHỊU TÁC DỤNG CỦA TRỌNG LỰC

I. Vật được ném đứng hướng lên

1. Tính chất của chuyển động :

- Đi lên : $\vec{a}, \vec{v_0}$ ngược chiều : chậm dần đều
- Đi xuống : $\vec{a}, \vec{v}$ ngược chiều : nhanh dần đều.

2. Các phương trình chuyển động :



– Gia tốc : $a = -g$

– Vận tốc : $v = -gt + v_0$

– Tọa độ : $y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t$

– Hệ thức độc lập thời gian : $v^2 - v_0^2 = -2gy$

– Vật ở vị trí cao nhất : $v = 0$; $t = \frac{v_0}{g}$; $y = \frac{v_0^2}{2g}$

– Vật sắp chạm đất : $v = 0$; $v = -v_0$; $t = \frac{2v_0}{2g}$.

3. Tính thuận nghịch của chuyển động :

Vận tốc của vật ở vị trí có độ cao y : $v = \pm\sqrt{v_0^2 - 2gy}$

Quá trình đi xuống, giống quá trình đi lên nhưng ngược chiều: tính thuận nghịch.

II. Vật được ném ngang :

1. Các phương trình chuyển động :

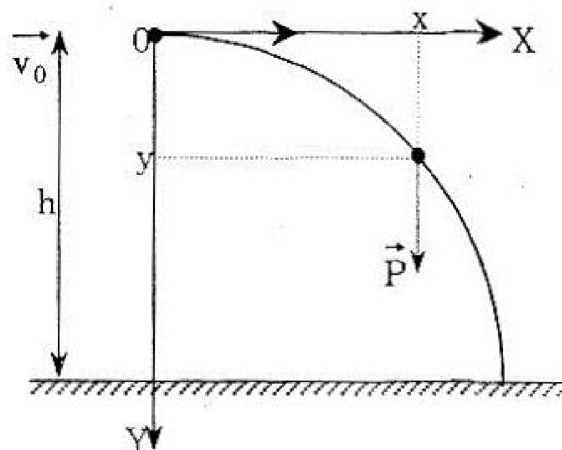
– Gia tốc: $a_x = 0$; $a_y = g$

– Vận tốc : $\begin{cases} v_x = v_0 \;;\; v_y = gt \;;\; v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2} \\ tg(\vec{v}, \overrightarrow{Ox}) = tg\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{gt}{v_0} \end{cases}$

– Tọa độ : $x = v_0t$; $y = \frac{1}{2}gt^2$

– Vật sắp chạm đất :

$$y = h;\; t = \sqrt{\frac{2h}{g}};\; x = v_0\sqrt{\frac{2h}{2g}}.$$



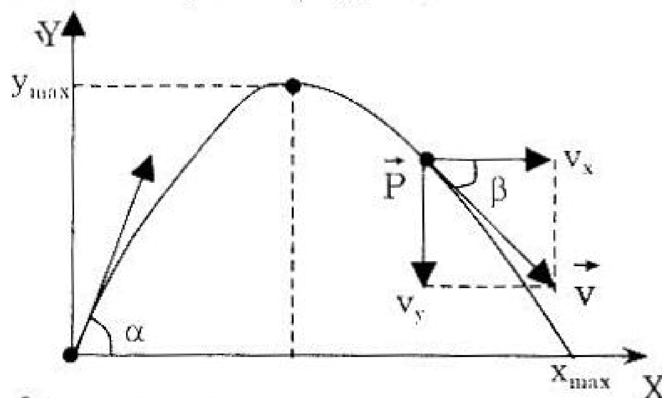
2. Quỹ đạo :

Parabol có phương trình :

$$y = \frac{g}{2v_0^2}x^2.$$

III. Vật được ném lên :

1. Các phương trình chuyển động :



- Gia tốc: $a_x = 0$; $a_y = -g$.
- Vận tốc :

$$v_x = v_0\cos\alpha;\ v_y = -gt + v_0\sin\alpha\ ;$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(gt)^2 - 2gv_0\sin\alpha t + v_0^2}$$

$$tg(\vec{v}, \overrightarrow{Ox}) = tg\beta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{-gt + v_0\sin\alpha}{v_0\cos\alpha}.$$

- Tọa độ : $x = v_0.\cos\alpha t$; $y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin\alpha t$.
- Vật ở vị trí cao nhất (độ cao cực đại):

$$y = 0;\ t = \frac{v_0.\sin\alpha t}{g};\ y_{max} = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}.$$

- Vật sắp chạm đất : $y = 0$; $t = \frac{2v_0.\sin\alpha t}{g}$; $x_{max} = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{2g}$.

2. Quỹ đạo :

Parabol có phương trình : $y = -\frac{g}{2v_0^2.\cos^2\alpha}.x^2 + tg\alpha.x$.

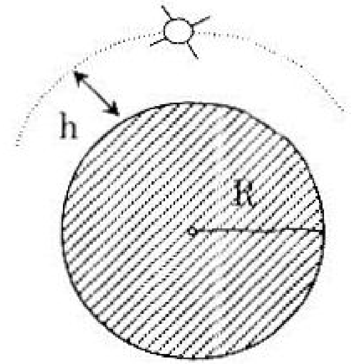
CHUYỂN ĐỘNG TRÒN VÀ LỰC HƯỚNG TÂM

I. Lực trong chuyển động tròn

- Vật chuyển động tròn đều. Hợp lực hướng vào tâm quỹ đạo
- Vật chuyển động tròn không đều : Thành phần của hợp lực trên trục hướng tâm đóng vai trò lực hướng tâm.
- Để tìm lực hướng tâm, chiếu phương trình $\vec{F} = m\vec{a}$ lên trục hướng tâm.

II. Các áp dụng :

1. Vệ tinh nhân tạo của Trái Đất :



– Vận tốc của vệ tinh : $v = \sqrt{G\dfrac{M}{R+h}}$

– Với h << R ta có : $v \approx \sqrt{gR} \approx 8km/s$

(Vận tốc vũ trụ cấp I)

2. Chuyển động của các hành tinh :

Hệ thức liên hệ giữa chu kỳ quay (năm) T và bán kính quỹ đạo r của hành tinh quanh mặt trời : $\dfrac{T^2}{r^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM} = const$

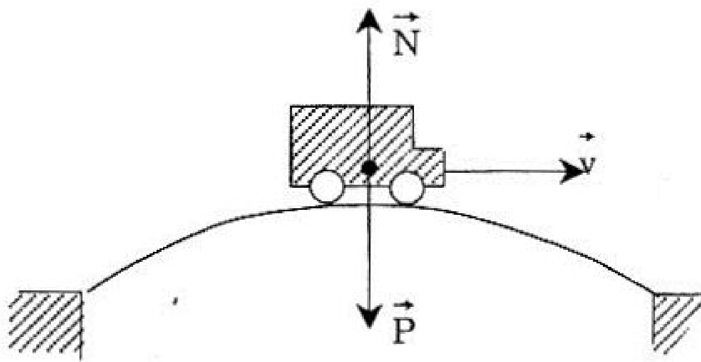
3. Chuyển động của xe trên đường vòng :

Phải có lực hướng tâm $F = m\dfrac{v^2}{R}$ tác dụng vào xe lực hướng tâm này là:

– Lực ma sát nghỉ của mặt đường (ô tô)

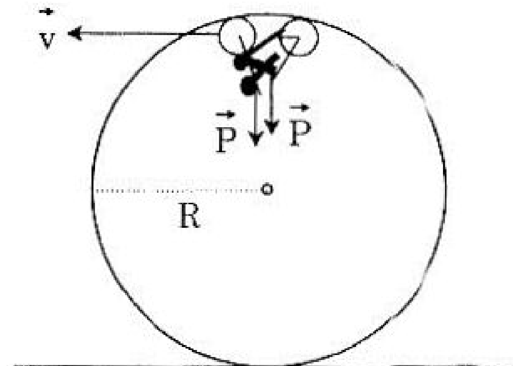
– Lực đàn hồi của thành đường ray (xe lửa).

4. Chuyển động trên cầu cong :



Lực nén của xe lên cầu : $N' = N = mg - m\dfrac{v^2}{R}$.

5. Chuyển động trên "vòng xiếc" :



Muốn xe qua hết vòng xiếc phải có điều kiện :

$v \geq \sqrt{gR}$

CHUYỂN ĐỘNG TRONG HỆ QUY CHIẾU KHÔNG QUÁN TÍNH

I. Chuyển động trong hệ quy chiếu không quán tính

- Phương trình của định luật II Newton trong hệ quy chiếu không quán tính :

$$\vec{F} + \vec{F_q} = m\vec{a}$$

$$\begin{cases} \vec{F} : & \text{tổng các lực tương tác} \\ \vec{F_q} : & \text{lực quán tính.} \end{cases}$$

- Lực quán tính có biểu thức :

$$\vec{F_q} = -m\vec{a}_{qc}$$

$$\begin{cases} m : & \text{Khối lượng của vật khảo sát} \\ \vec{a}_{qc} : & \text{Gia tốc của hệ quy chiếu chuyển động đối với một hệ quy chiếu quán tính.} \end{cases}$$

Đặc biệt trong hệ quy chiếu không quán tính quay đều, lực quán tính là lực li tâm có độ lớn :

$$F_q = m\frac{v^2}{R} = m\omega_2 R .$$

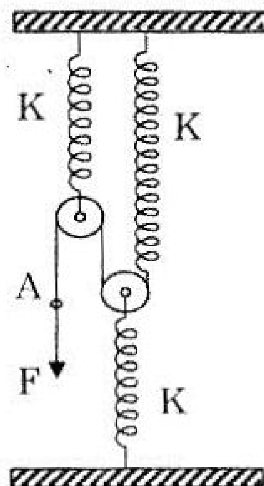
II. Áp dụng : trọng lượng của vật

Trọng lượng là hợp lực của lực hấp dẫn do Trái Đất và lực quán tính tác dụng lên vật :

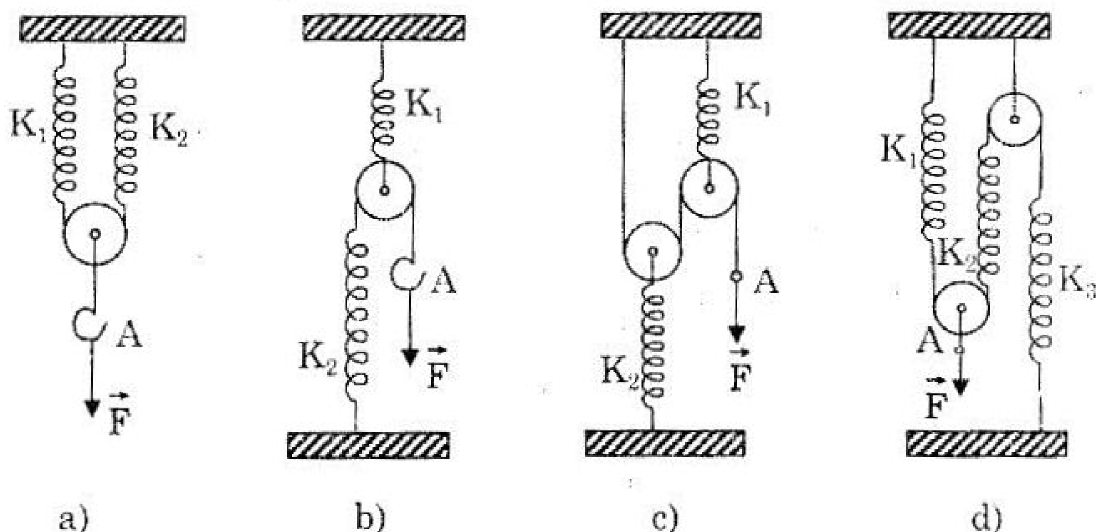
$$\vec{P} = m\vec{g} + \vec{F}_q .$$

II. BÀI TẬP

2.1. Cho $K_1 = K_2 = K_3 = 100$ N/m. Khi tác dụng vào điểm A một ngoại lực F = 1 (N) thì điểm A dịch một đoạn bao nhiêu (kể từ trạng thái 3 lò xo tự nhiên). Giả sử các lò xo có khối lượng không đáng kể. Bỏ qua khối lượng các ròng rọc và các sợi dây. Các dây đều mềm và thẳng đứng.



2.2. Tìm độ cứng tương đương của các hệ lò xo sau :



Trong đó, bỏ qua khối lượng ròng rọc, các lò xo, các sợi dây. Các sợi dây mềm và thẳng đứng.

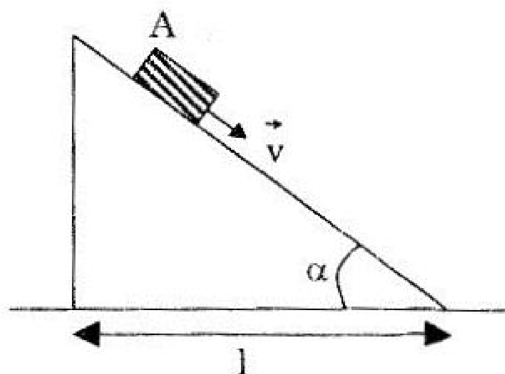
2.3. Vật có khối lượng m = 1kg có thể trượt trên mặt phẳng ngang với hệ số ma sát trượt là K.



1. Tác dụng 1 lực $\vec{F}$ theo phương chếch 1 góc 30^0 so với mặt phẳng ngang mà vật vẫn đứng yên. Tìm lực ma sát nghỉ nếu F = 10N.

2. Cho hệ số ma sát là $K = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Tác dụng lực F theo phương nghiêng 1 góc 30^0 cho vật trượt đều. Tìm F.

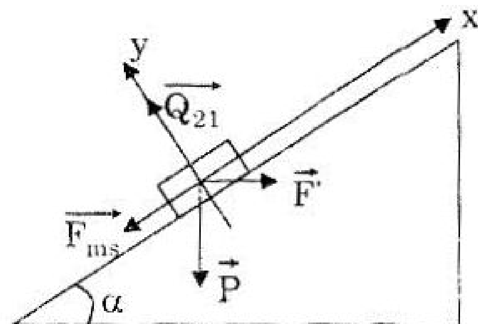
2.4. Vật trượt từ đỉnh dốc, cho trước l, góc α có thể thay đổi. Vận tốc ban đầu bằng 0. Hệ số ma sát giữa vật và mặt phẳng nghiêng là K. Mặt phẳng nghiêng đứng yên. Tính α để thời gian đi từ đỉnh đến chân dốc là nhỏ nhất. Tính thời gian đó.



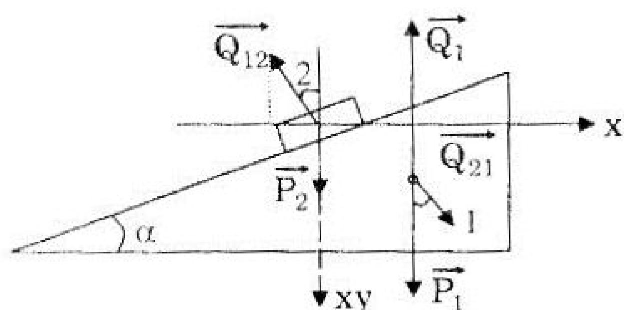
2.5. Kéo vật lên đều trên mặt phẳng nghiêng có góc nghiêng α hệ số ma sát K. Hỏi góc β giữa véc tơ lực kéo $\vec{F}$ và mặt nghiêng là bao nhiêu để lực kéo là cực tiểu.

2.6. Vật khối lượng m có thể trượt trên nêm với hệ số ma sát K, góc của mặt phẳng nghiêng là α, cho biết K < cotangα. Phải truyền cho nêm một gia tốc a để m đứng yên trên nêm.

Tìm a_{max} ?



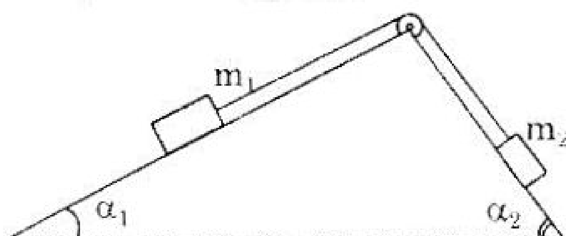
2.7. Bỏ qua mọi ma sát, tìm gia tốc của khối lăng trụ 1, theo g, m_1, m_2.



2.8. Cho m_1, m_2, α_1, α_2 hệ số ma sát K_1 giữa m_1 và nêm K_2 giữa m_2 và nêm. Nêm luôn đứng yên .

1. Khi vật đang chuyển động. Tìm gia tốc của chúng.

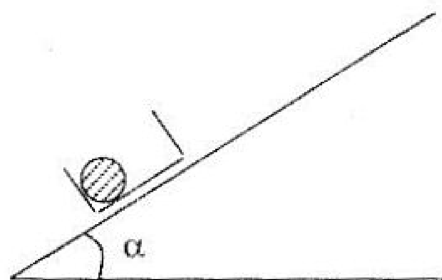
2. Ban đầu hệ số đứng yên. Tìm điều kiện để các vật tiếp tục đứng yên.



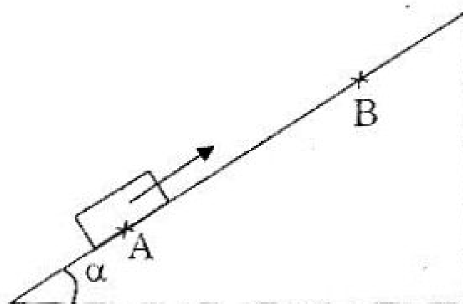
2.9. Trên mặt phẳng nghiêng đứng yên có góc nghiêng $\alpha = 30^0$, một hộp gỗ trượt từ trên xuống với hệ số ma sát $K = \frac{\sqrt{3}}{10}$.

Trong hộp có một hình cầu đồng chất, khối lượng m = 5kg.

Tìm các lực mà hình cầu tác dụng lên hộp.



2.10. Cho mặt phẳng nghiêng có góc nghiêng $\alpha = 30^0$. Một vật bắt đầu trượt từ dưới lên qua A dừng lại ở B. Sau đó từ B trượt về qua A. Thời gian về gấp 2 lần thời gian đi. Tính hệ số ma sát K.

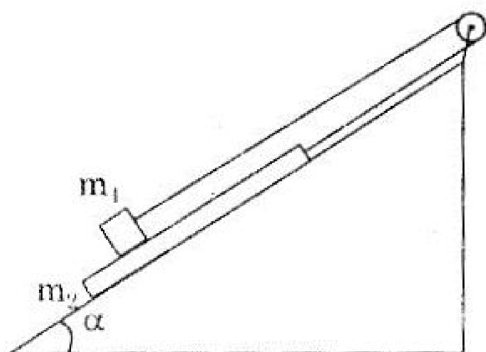


2.11. Vật m_1 có khối lượng 1 kg trượt trên tấm ván có khối lượng m_2 = 9kg hệ số ma sát giữa vật và tấm ván là K_{12}. Hệ số ma sát giữa tấm ván và mặt phẳng nghiêng là K_2 mặt phẳng nghiêng đứng yên và có góc nghiêng α. Bỏ qua khối lượng ròng rọc, khối lượng các sợi dây, độ giãn của các sợi dây và ma sát trong ròng rọc.

Cho $\alpha = 30^0$; $K = \frac{\sqrt{3}}{10}$; $K_2 = \frac{\sqrt{3}}{20}$

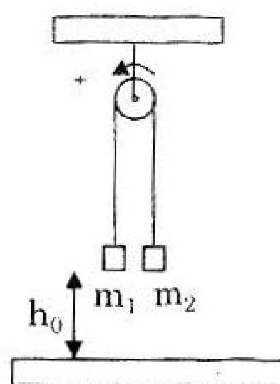
1. Tìm gia tốc hai vật.

2. Kết quả có gì đặc biệt không.



2.12. Bỏ qua một ma sát, độ giãn của dây. Bỏ qua khối lượng ròng rọc và các sợi dây $m_1 = 3\ m_2$. Ban đầu hệ đứng yên. Hai vật có cùng độ cao $h_0 = 1(m)$.

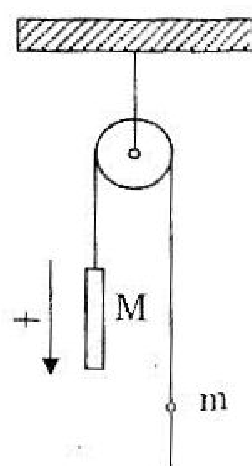
Thả cho hệ chuyển động. Tìm chiều cao cực đại mà m_2 đạt được sau đó?



2.13. Cho M > m. Hòn bi m chọc thủng, sợi dây xuyên qua và trượt với lực ma sát nào đó.

Bỏ qua khối lượng ròng rọc, sợi dây, ma sát ở ròng rọc bằng không.

Lúc thả ra 2 vật bắt đầu chuyển động, hòn bi có độ cao ngang đầu dưới của thanh. Hãy xác định lực ma sát giữa hòn bi và sợi dây, biết rằng sau t giây, hòn bi ở ngang đầu trên của thanh. Thanh có chiều dài l.

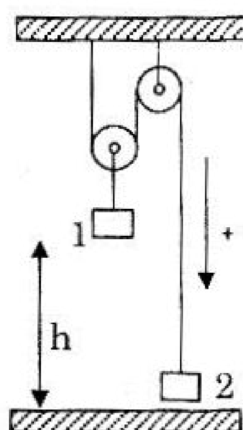


2.14. Cho $m_1 = 4m_2$, h = 20 cm.

Bỏ qua ma sát. Bỏ qua khối lượng các ròng rọc

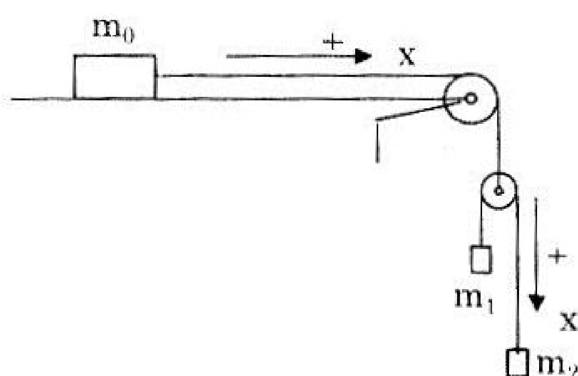
Lúc bắt đầu chuyển động, vật 2 ở mặt đất, vật 1 ở độ cao h. Giả sử khi vật 1 chạm đất, vật 2 có thể chuyển động tiếp theo không bị vướng.

Hỏi giá trị cực đại của độ cao mà vật 2 đạt được.



2.15. Bỏ qua mọi ma sát, bỏ qua khối lượng ròng rọc, các sợi dây. Bỏ qua chiều dài của các độ giãn các sợi dây.

Tìm gia tốc của m_1. Biện luận kết quả.

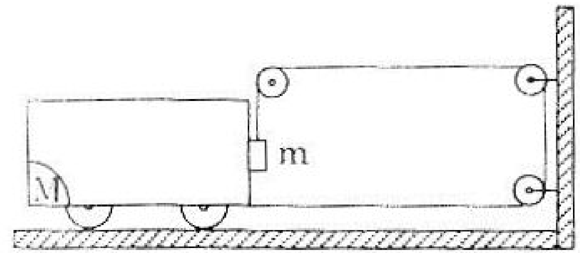


2.16. Xe có khối lượng M = 14 kg, vật có khối lượng m = 1kg luôn tiếp xúc M khi chuyển động. Bỏ qua khối lượng 3 ròng rọc của sợi dây. Bỏ qua độ giã n của dây và ma sát trong ròng rọc. Xe chuyển động trên mặt đường ngang, nhẵn. Hệ số ma sát giữa xe M và m là K = 0,5.

1. Kể ra các lực tác dụng lên M? lên m?

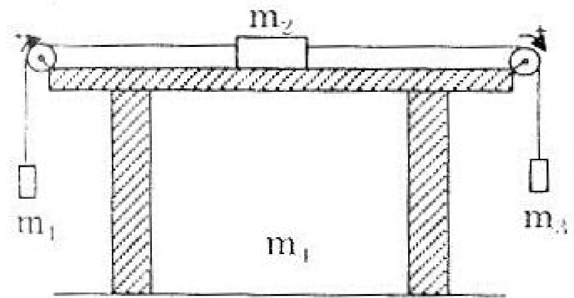
2. Tìm liên hệ giữa gia tốc hai vật?

3. Tìm gia tốc a_1 của M.



2.17. Cho các khối lượng: $m_1 = 1kg$, $m_2 = 2kg$, $m_3 = 3kg$, $m_4 = 10kg$. Hệ số ma sát giữa m_2 và bàn là $K_2 = 0.1$.

Hệ số ma sát giữa 4 chân bàn và mặt sàn nằm ngang là K. Bỏ qua ma sát trong các ròng rọc, bỏ qua khối lượng ròng rọc, khối lượng các sợi dây và độ giãn các sợi dây.



1. Vẽ đủ các lực tác dụng lên từng vật.

2. Tìm gia tốc của các vật m_1, m_2, m_3 nếu bàn đứng yên.

3. Hệ số ma sát K phải thỏa mãn giá trị nào để bàn đứng yên.

2.18. Một vật có khối lượng m_1 đến va chạm hoàn toàn đàn hồi với vật m_2 đang đứng yên. Tính tỷ số động năng bị giảm đi của hạt m_1 nếu :

a) Hạt đó bị bật lại theo hướng vuông góc với phương bay ban đầu.

b) Va chạm có tính xuyên tâm.

2.19. Vật 1 khối lượng m_1 đến va chạm đàn hồi với vật khối lượng m_2 đang đứng yên. Tìm tỷ số $\frac{m_1}{m_2}$ nếu :

a) Va chạm xuyên tâm, sau va chạm hai hạt có cùng vận tốc và ngược hướng nhau : $\overrightarrow{V_1}' = -\overrightarrow{V_2}'$.

b) Sau va chạm hai hạt bay ra đối xứng nhau và cùng tạo với phương bay ban đầu của hạt 1 góc $\theta = 30^0$.

2.20. Hai người cùng có khối lượng m, đứng yên trên chiếc xe có khối lượng M đang nằm yên. Hãy xác định vận tốc của chiếc xe sau khi hai người nhảy ra khỏi xe theo phương ngang với vận tốc u (so với xe).

1. Nhảy đồng thời.

2. Người trước, người sau.

Trường hợp nào vận tốc xe thu được sẽ lớn hơn và lớn hơn bao nhiêu lần. Bỏ qua ma sát.

2.21. Ba chiếc thuyền, mỗi chiếc có khối lượng là M, đang chuyển động thẳng đều trên một đường thẳng. Mặt nước yên lặng. Bỏ qua lực cản

của nước.

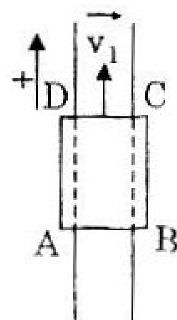
Từ thuyền giữa ném ra 2 vật cùng có khối lượng m, cùng vận tốc u (so với thuyền giữa) lên thuyền đầu và cuối cho rằng vật m chuyển động thẳng và đều cho đến lúc chạm các thuyền.

Tìm vận tốc mỗi thuyền sau khi ném.

a) Xét trong hệ quy chiếu gắn với mặt nước.

b) Xét trong hệ quy chiếu gắn với thuyền giữa.

2.22. Một xe goòng có khối lượng m_1 = 240 kg chở một người có khối lượng m_2 = 60kg và đang chuyển động thẳng đều với vận tốc v_1 = 1m/s.



Tính vận tốc của xe sau khi người :

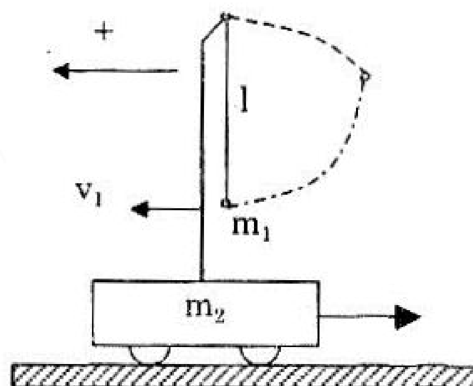
a) Nhảy ra sau xe với vận tốc v_2 = 2m/s so với xe.

b) Nhảy ra phía trước với vận tốc ấy so với xe.

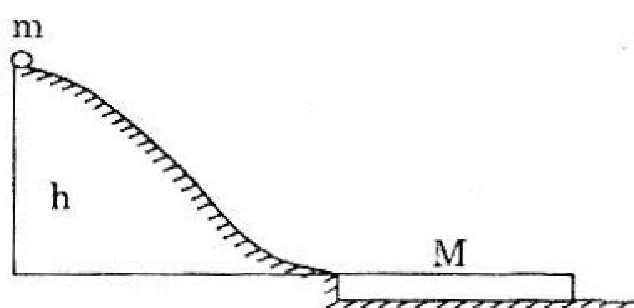
c) Nhảy vuông góc với mặt đất để bám vào một cành cây khi xe đi dưới cành cây.

d) Nhảy song song với thành AB của xe chuyển động với vận tốc v_2 = 2m/s (so với xe).

2.23. Xe có khối lượng m_2 có thể dịch không ma sát trên mặt phẳng ngang đang đứng yên. Con lắc chiều dài l, khối lượng m_1 có thể chuyển động trong mặt phẳng thẳng đứng chứa quỹ đạo của xe. Bỏ qua lực cản không khí. Ban đầu nâng con lắc cho dây căng ngang, thả nhẹ cho m_1 chuyển động. Tìm vận tốc $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ khi con lắc ở vị trí thẳng đứng.



2.24. Một vòng đệm nhỏ khối lượng m trượt không vận tốc ban đầu từ độ cao h, trên đỉnh của ngọn đồi nhẵn, sau đó nhẹ nhàng trượt trên tấm ván khối lượng M. Bỏ qua ma sát giữa ván M và mặt đường. Do có ma sát giữa m và M nên đến một lúc nào đó cả hai cùng chuyển động với nhau.



1) Tính công của lực ma sát.

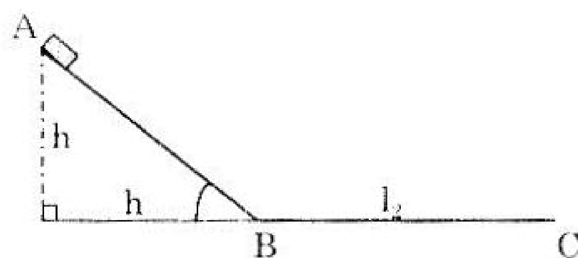
2) Có thể khẳng định rằng kết quả trên không phụ thuộc vào hệ quy chiếu hay không.

2.25. Một vành đệm (trượt không lăn) từ vận tốc ban đầu $v_A = 0$ tại A, qua B

chỉ đổi hướng vận tốc rồi tiếp tục trượt và dừng lại ở C.

Cho hệ số ma sát hai mặt AB và BC cùng là K.

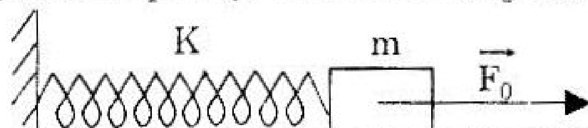
Dùng phương pháp năng lượng để tính.



a) Hệ số ma sát theo h, l_1, l_2.

b) Từ C phải có vận tốc ban đầu V_c là bao nhiêu để đi ngược lên đến đỉnh A.

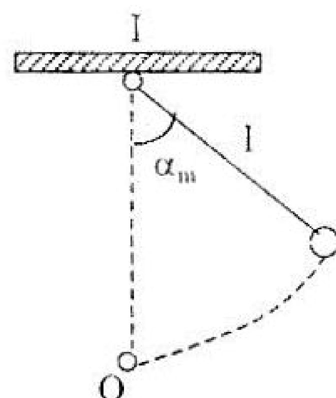
2.26. Một lò xo có độ cứng K = 100 N/m, một đầu cố định, đầu còn lại gắn một vật m có khối lượng m = 100 gam. Bỏ qua lực cản của không khí, và lực ma sát trượt giữa m và mặt phẳng ngang. Bỏ qua khối lượng lò xo.



1) Tác dụng một lực không đổi F_0 vào m, lúc m có vận tốc bằng 0 thì độ giã n của lò xo là bao nhiêu.

2) Khi có cân bằng lực $F_0 = F_{đh}$ của lò xo thì vận tốc m là bao nhiêu.

2.27. Con lắc đơn có sợi dây chiều dài l = 1 (m), treo vật có khối lượng m = 100g (kích thước không đáng kể). Bỏ qua khối lượng sợi dây, độ giãn của dây và mọi ma sát.

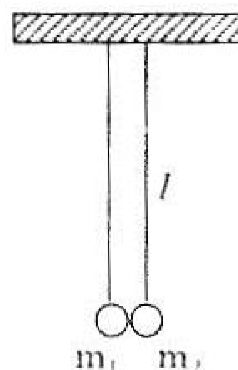


Ban đầu Om lắc đến góc lệch $\alpha_m = 60^0$ rồi thả nhẹ. Tìm vận tốc vật m và lực căng T của sợi dây khi góc lệch của sợi dây là.

a) $\alpha = 30^0$.

b) $\alpha = 0^0$ (tại vị trí cân bằng).

2.28. Hai con lắc có cùng chiều dài l, treo 2 quả cầu có cùng kích thước, khối lượng $m_2 = 3m_1$. Bỏ qua lực cản không khí, khối lượng sợi dây, các quả cầu coi như chất điểm. Lúc cân bằng hai dây thẳng đứng, 2 quả cầu tiếp xúc nhau. Ban đầu quả cầu m_2 đứng yên ở vị trí cân bằng, m_1 nâng lên độ cao h_0 và thả nhẹ.



1) Tìm chiều cao cực đại h_1, h_2 mà chúng đạt được ngay sau va chạm lần đầu, nếu :

a) Va chạm hoàn toàn đàn hồi.

b) Va chạm hoàn toàn mềm (ngay sau va chạm, chúng có cùng vận tốc).

2) Tìm chiều cao của chúng sau va chạm lần thứ 2 (giả thiết là lần thứ 2 chúng cũng lại gặp nhau ở vị trí cân bằng, do h rất nhỏ).

2.29. Một vật m trượt không ma sát trên một máng có dạng như hình vẽ. Bắt đầu là đường dốc MA, sau đó là máng tròn tâm O.

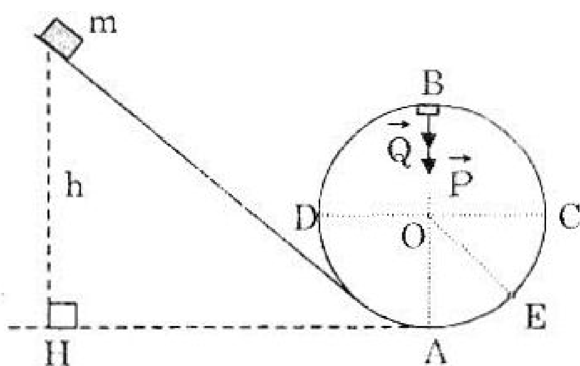
1) Phải thả từ độ cao h nào để qua được điểm B.

2) Nếu h = 2R.

a) Vật tách quỹ đạo tròn từ độ cao nào.

b) Sau đó lên đến độ cao cực đại nào.

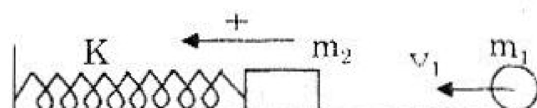
c) Tìm áp lực mà vật tác dụng lên A, C, E của máng.



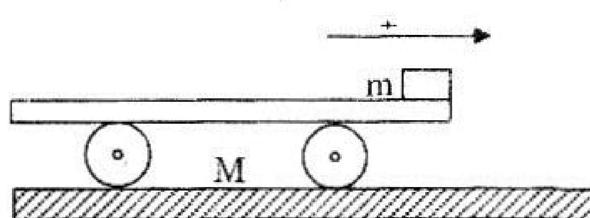
2.30. Lò xo có chiều dài tự nhiên l_0 = 30cm, độ cứng K = 100N/m. Khối lượng không đáng kể, m_1 = 100g, m_2 = 300g. Bỏ qua mọi loại ma sát. m_1 đang chuyển động dọc theo trục lò xo với vận tốc v_1 = 1m/s đến va chạm xuyên tâm (xuyên trục lò xo) với m_2. Tìm chiều dài cực tiểu của lò xo nếu :

a) Va chạm hoàn toàn mềm, sau va chạm 2 vật có cùng vận tốc.

b) Va chạm hoàn toàn đàn hồi.



2.31. Xe có khối lượng M = 10kg đang chuyển động thẳng đều với vận tốc v_0 = 1m/s. Thả nhẹ một vật m = 1kg lên đầu xe. Bỏ qua ma sát giữa xe và mặt đường ngang. Ma sát giữa m và xe có hệ số K = 0,1 chiều dài xe đủ để quan sát chuyển động.



2.32*. Trong một trường lực đã cho các phương trình chuyển động của hạt khối lượng m = 0,5 kg có dạng sau:

$$x = 5t^2 - t, \qquad y = 2t^3, \qquad z = -3t + 2$$

Tìm sự phụ thuộc vào thời gian của vận tốc, xung lượng, gia tốc, lực tác dụng lên hạt và công suất trường truyền cho hạt.

2.33*. Một hạt khối lượng m = 3kg chuyển động trong trường lực $\vec{F}$ phụ thuộc vào thời gian như sau:

$$\vec{F} = (15t,\ 3t - 12,\ 6t^2)\ \text{N}$$

Giả sử các điều kiện ban đầu là $\vec{r}_0 = (5, 2, -3)$ m, $\vec{v}_0 = (2, 0, 1)$ m/s, tìm sự phụ thuộc của vị trí và vận tốc của hạt vào thời gian.

2.34*. Hạt có khối lượng m chuyển động trong mặt phẳng xy theo các phương

trình chuyển động sau:

$$x = a\cos\omega t, \qquad y = b\sin\omega t$$

a) Hạt chuyển động theo quỹ đạo như thế nào?

b) Tìm sự phụ thuộc của vận tốc và động năng vào thời gian.

c) Tìm giá trị và phương của lực tác dụng lên hạt.

d) Tìm công mà lực đã thực hiện lên hạt giữa các điểm (a, 0) và (0, b).

e) Tìm công toàn phần mà lực đã thực hiện lên hạt trong thời gian toàn chu kỳ của chuyển động

f) Lực này có phải là lực bảo toàn không ?

g) Tìm sự phụ thuộc thế năng của hạt vào vị trí

h) Xác định năng lượng toàn phần của hạt, năng lượng này có phụ thuộc vào thời gian không ?

i) Tìm sự phụ thuộc của mômen xung lượng vào vị trí của hạt, tính theo điểm (0, 0).

2.35*. Lực $\vec{F} = (2xz^2 - 2y, -2x - 6yz, 2x^2z - 3y^2)$ có phải là lực bảo toàn không ? Nếu là lực bảo toàn, thì hãy tìm thế năng U tương ứng của nó.

2.36*. Giải bài toán trên cho lực F (x, y, z) = $(x^2z, -xy, 5)$ và tính công do lực này thực hiện khi đi từ điểm A = (–1, 0, 0) đến điểm B(1, 0, 0):

a) Theo đường thẳng dọc theo trục x

b) Theo nửa vòng tròn trong mặt phẳng x, y.

2.37*. Hãy chứng minh rằng trong trường thế năng thành phần của các lực tác dụng phải thỏa mãn các hệ thức:

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z}, \qquad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}, \qquad \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

2.38*. Chất điểm khối lượng m chuyển động theo quỹ đạo tròn trong trường thế năng có dạng $U = -\dfrac{am}{r^n}$, ở đây hệ số tỷ lệ a là số dương. Hãy chứng tỏ rằng quỹ đạo ổn định của chất điểm chỉ tồn tại khi n < 2.

Ta gọi quỹ đạo ổn định là quỹ đạo khi có một nhiễu loạn nhỏ tác dụng vật không rời quỹ đạo đó để rơi xuống tâm trường hoặc tiến đến vô cùng.

2.39*. Hãy:

1. Xác định thế năng của trường xuyên tâm, nếu lực của nó tại khoảng cách r đến tâm trường bằng:

a) $\vec{F}_1 = -\dfrac{\alpha}{r^4}\dfrac{\vec{r}}{r}$ b) $\vec{F}_2 = \alpha r^2 \dfrac{\vec{r}}{r}$ c) $\vec{F}_3 = \dfrac{\alpha}{r^2}\dfrac{\vec{r}}{r}$

2. Tìm lực tác dụng trong trường, trong đó thế năng diễn tả theo công thức:

a) $U_1 = \frac{\alpha_1}{r} + \frac{\alpha_2}{2r^2}$, b) $U_2 = \frac{\alpha}{\pi}\cos(\pi r)$, c) $U_3 = \alpha r$.

2.40*. Hãy giải thích tại sao nhà du hành vũ trụ lại ở trong trạng thái mất trọng lượng, khi con tàu vũ trụ đã ngắt động cơ (tức đã bay trong quỹ đạo).

2.41*. Một vật được đặt trên một mặt phẳng nghiêng hợp với mặt phẳng nằm ngang một góc $\alpha = 4^0$. Hỏi :

a) Giới hạn của hệ số ma sát f giữa vật và mặt phẳng nghiêng để vật có thể trượt được trên mặt phẳng nghiêng đó.

b) Nếu hệ số ma sát bằng 0,03 thì gia tốc của vật bằng bao nhiêu? Khi đó muốn trượt hết quãng đường s = 100m, vật phải mất thời gian bao lâu ?

c) Trong điều kiện ở câu hỏi (b) vật có vận tốc ở cuối quãng đường 100m bằng bao nhiêu ?

2.42*. Người ta gắn vào mép bàn (nằm ngang) một ròng rọc khối lượng không đáng kể. Hai vật A và B có khối lượng bằng nhau $m_A = m_B = 1$kg được nối với nhau bằng một sợi dây vắt qua ròng rọc. Hệ số ma sát giữa vật B và mặt bàn bằng k = 0,1. Tìm:

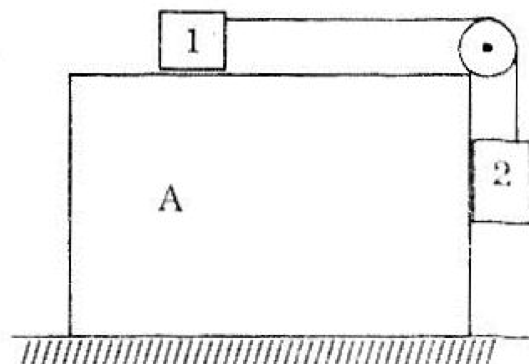
a) Gia tốc của hệ.

b) Lực căng của dây.

2.43*. Một vật trượt từ đỉnh một mặt phẳng nghiêng hợp với mặt phẳng nằm ngang một góc $\alpha = 30^0$. Chiều dài của mặt phẳng nghiêng bằng l = 167 cm, hệ số ma sát giữa vật và mặt phẳng nghiêng f = 0,2, vận tốc ban đầu của vật bằng 0.

Hỏi sau bao lâu vật trượt hết mặt phẳng nghiêng ?

2.44*. Hỏi phải truyền cho vật A một gia tốc theo phương nằm ngang nhỏ nhất là bao nhiêu để cho hai vật 1 và 2 không chuyển dịch đối với A ? Các vật 1 và 2 có cùng khối lượng, hệ số ma sát giữa vật A và các vật 1, 2 bằng f. Coi như khối lượng của ròng rọc, của các dây nối nhỏ không đáng kể và không có ma sát ở ròng rọc.



2.45*. Một ô tô có khối lượng m = 1.000kg chạy với vận tốc không đổi v = 36km/h.

Tính công suất của động cơ ô tô trong ba trường hợp:

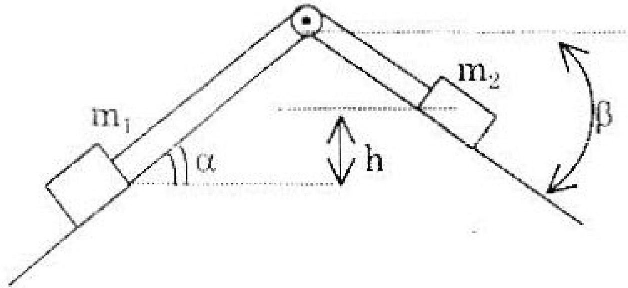
a) Ô tô chạy trên quãng đường nằm ngang.

b) Ô tô chạy lên dốc có độ dốc 5 %.

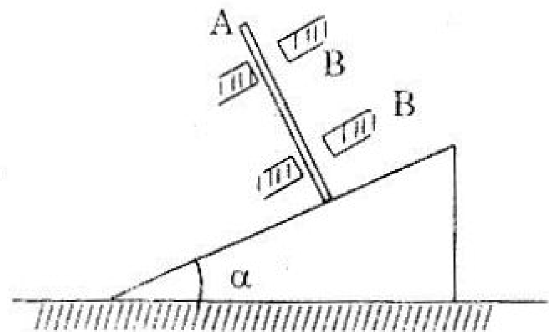
c) Ô tô chạy xuống dốc có độ dốc 5 %.

Hệ số ma sát giữa ô tô và mặt đường trong cả ba trường hợp là f = 0,07.

2.46*. Hai khối lượng $m_1 = 0,2$ kg, $m_2 = 0,1$ kg được nối với nhau bằng một sợi chỉ mảnh không khối lượng, không co giãn vắt qua ròng rọc. Các khối lượng đó nằm trên các mặt phẳng nghiêng một góc $\alpha = 15^0$, $\beta = 6^0$ so với phương nằm ngang. Trước khi chuyển động các khối lượng đó nằm trên cùng một độ cao. Hãy xác định sự chênh lệch về độ cao h của các khối lượng m_1 và m_2 sau một thời gian t = 3 giây biết rằng hệ số ma sát giữa mặt phẳng nghiêng và các khối lượng là f = 0,1. Khối lượng của ròng rọc, ma sát vào trục ròng rọc có thể bỏ qua.

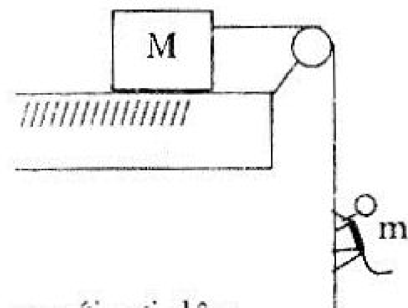


2.47*. Trên một mặt phẳng nằm ngang tuyệt đối nhẵn có một cái nêm với khối lượng M = 1,5 kg và góc ở đỉnh $\alpha = 30^0$. Thanh A có thể chuyển động tự do theo phương vuông góc với mặt phẳng của hộp định hướng B, ma sát có thể bỏ qua. Hãy xác định gia tốc chuyển động a_1, a_2 của cái nêm và thanh A và áp lực N của thanh A lên cái nêm.



2.48*. Một nồi nước trượt trên mặt dốc có độ nghiêng α. Hệ số ma sát $f < \mathrm{tg}\alpha$. Xác định độ nghiêng của mặt nước trong nồi so với mặt dốc.

2.49*. Con khỉ khối lượng m bám vào sợi dây vắt qua một ròng rọc cố định và đầu kia của sợi dây buộc vào một vật khối lượng M. Tìm chuyển động của hệ trong các trường hợp sau:



a) Khỉ chỉ bám vào sợi dây.

b) Khỉ leo dọc sợi dây với vận tốc không đổi v_0 so với sợi dây.

c) Khỉ leo với gia tốc a_0 không đổi so với sợi dây. Giả thiết rằng khối lượng M chuyển động không ma sát.

2.50*. Tìm các nghiệm của bài toán trên cho các trường hợp sau đây:

1) Khi có lực ma sát (hệ số ma sát bằng *f*) tác dụng lên khối lượng M,

2) Khi khối lượng M treo ở phía thứ 2 của ròng rọc.

2.51*. Điểm cố định B đẩy chất điểm A bằng một lực tỷ lệ với khoảng cách giữa chúng, tại thời điểm t = 0 khoảng cách AB bằng không và vận tốc của điểm A bằng v_0. Tìm chuyển động của điểm A trên cơ sở:

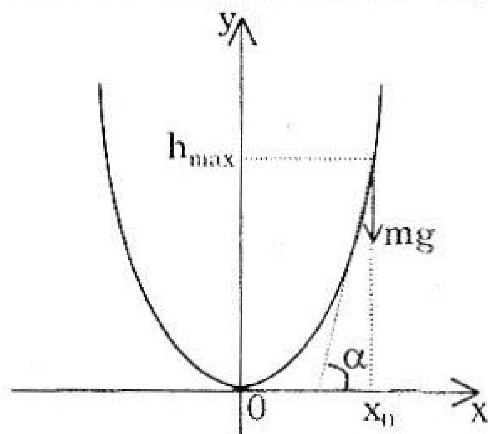
a) Phương trình chuyển động,

b) Tích phân năng lượng.

2.52*. Tìm nghiệm của bài toán trên cho trường hợp khi điểm A bị điểm B hút bằng một lực tỷ lệ với khoảng cách AB.

2.53* Một sợi dây nằm trên mặt bàn nhẵn, 1/4 sợi dây bị treo thõng xuống dưới. Hãy tìm thời gian rơi của sợi dây khỏi mặt bàn, nếu tại thời điểm t = 0, vận tốc của sợi dây bằng không và chiều dài của sợi dây bằng l.

2.54*. Chất điểm khối lượng m nằm trên sườn thung lũng dạng parabôn $y = ax^2$. Hệ số ma sát bằng *f*. Toàn hệ đặt trong trọng trường quả Đất. Tìm chiều cao cực đại h_{max}, tại đấy chất điểm sẽ nằm yên.



2.55*. Người ta ném hòn đá có khối lượng m vào giếng nước với vận tốc v_0. Mặt nước của giếng nằm ở độ sâu d. Giả thiết rằng trong không khí hòn đá rơi tự do, nhưng ở trong nước có một lực cản tỷ lệ với vận tốc (F =– kv) tác dụng lên nó. Tìm sự phụ thuộc của vị trí, vận tốc và gia tốc của hòn đá vào thời gian.

Theo vết hòn đá trên, sau khoảng thời gian T người ta lại ném một hòn đá khác cùng khối lượng và cùng vận tốc v_0. Tìm sự phụ thuộc của khoảng cách D giữa hai hòn đá vào thời gian.

2.56*. Người ta ném quả bóng khối lượng m thẳng đứng lên trên với vận tốc v_0. Lực cản của không khí tác dụng lên quả bóng diễn tả theo công thức F = – kv. Tìm phương trình chuyển động của quả bóng, thời gian bay đến điểm cao nhất của quỹ đạo và vị trí của điểm đó.

2.57*. Giải bài toán ném xiên một vật trong trọng trường. Trong thời gian chuyển động vật chịu tác dụng một lực cản tỷ lệ đến vận tốc. Tìm phương trình chuyển động. Chiều cao cực đại và thời gian đạt đến cực đại đó. Biện luận trường hợp khi lực cản nhỏ hơn rất nhiều so với trọng lượng vật.

2.58*. Con lắc toán học khối lượng m và chiều dài l dao động tắt dần trong một môi trường. Biết rằng tại thời điểm t_0 độ lệch cực đại của con lắc bằng góc α và sau một thời gian t độ lệch cực đại giảm xuống bằng góc β, tìm năng lượng mất mát của con lắc liên quan với sức cản trong chuyển động.

2.59*. Chiếc xe du lịch bị giảm tốc độ do lực cản $F = -kv^2$. Xe này chạy được khoảng đường dài bao nhiêu trước khi vận tốc của nó giảm xuống một nửa ?

2.60*. Một vật có khối lượng m và vận tốc v_0 bay vào một môi trường, trong đó xuất hiện lực cản tác dụng $\vec{F} = -kv^{n-1}\vec{v}$, ở đây $n \geq 0$. Chứng minh rằng chuyển động của vật này là chuyển động thẳng và hãy biện luận sự phụ thuộc quãng đường và thời gian kéo dài của chuyển động vào giá trị n.

2.61*. Ta ném một quả cầu gỗ mật độ ρ_1 từ chiều cao h_0 vào chất lỏng mật độ ρ_2, với $\rho_1 < \rho_2$. Quả cầu sẽ nhảy lên khỏi mặt chất lỏng một độ cao bao nhiêu nếu biết rằng lực cản mà chất lỏng tác dụng lên quả cầu bằng $F = -kv$?

Đặt $\rho_1 = 5.10^2$ kg/m^3, $\rho_2 = 10^3$kg/m^3, $k = 2.10^{-3}$kg/s,

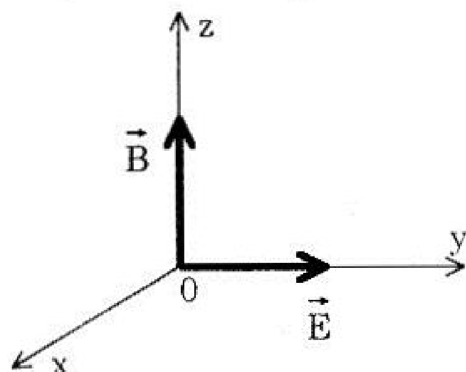
$h_0 = 0{,}2$m, $g = 10$m/s, $m = 5.10^{-4}$ kg.

Chú ý : Do xuất hiện sức căng bề mặt, nên trong thực tế chuyển động của quả cầu rất phức tạp và ở đây ta chỉ khảo sát theo nghĩa gần đúng trên.

2.62*. Tìm và biện luận phương trình chuyển động và phương trình quỹ đạo của hạt có khối lượng m và điện tích q chuyển động trong điện trường E đồng nhất và không đổi. Tính sự thay đổi động năng của hạt phụ thuộc vào vị trí và thời gian. Vận tốc ban đầu $v_0 \neq 0$, vị trí ban đầu $\vec{r} = 0$.

2.63*. Tìm và biện luận các phương trình chuyển động và phương trình quỹ đạo của hạt có khối lượng m và điện tích q chuyển động trong từ trường đồng nhất cảm ứng $\vec{B}$. Xét sự thay đổi động năng của hạt phụ thuộc vào vị trí và thời gian. Vận tốc ban đầu $v_0 \neq 0$, vị trí ban đầu $r_0 = 0$.

2.64*. Tìm phương trình chuyển động của hạt khối lượng m và điện tích q chuyển động trong điện và từ trường không đổi, vuông góc nhau. Giả sử $\vec{B} = (0, 0, B)$, $\vec{E} = (0, E, 0)$, vận tốc ban đầu $\vec{v_0} = (v_0, 0, 0)$ và $\vec{r} = 0$.



2.65*. Tìm phương trình chuyển động của hạt khối lượng m và điện tích q chuyển động trong điện trường biến thiên đồng nhất. Giả sử $\vec{E} = (E_0\sin\omega t, 0, 0)$, $\vec{v}_0 = (v_0, 0, 0)$, $\vec{r}_0 = (x_0, 0, 0)$

2.66*. Tìm phương trình chuyển động của hạt khối lượng m và điện tích q chuyển động trong từ trường đồng nhất, không đổi và trong môi trường, tại đấy lực cản tỷ lệ đến vận tốc, tức $F = -kv$, tác dụng lên mọi vật. Giả thiết rằng $\vec{B} = (0, 0, B)$, $\vec{v_0} = (v_0, 0, 0)$, $\vec{r_0} = (x_0, y_0, 0)$.

Xác định dạng quỹ đạo; vec tơ $\vec{r_0}$ phải như thế nào để quỹ đạo kết thúc tại gốc hệ tọa độ.

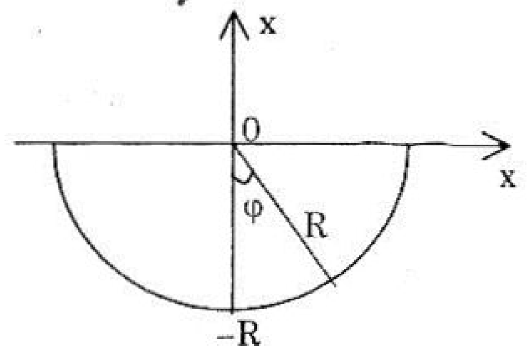
2.67*. Tìm phương trình chuyển động của hạt có khối lượng m và điện tích q chuyển động trong điện và từ trường đồng nhất không đổi hướng ngược chiều nhau. Giả sử $E = (-E, 0, 0)$, $B = (B, 0, 0)$, $v_0 = (v_{0X}, v_{0Y}, 0)$, $r_0 = 0$.

Xác định dạng của quỹ đạo và sự phụ thuộc của nó vào các điều kiện ban đầu.

2.68*. Tìm phương trình chuyển động của hạt có khối lượng m và điện tích q chuyển động trong điện trường quay và trong từ trường vuông góc đến trường này. Cho $E = (E\cos\omega t, -E\sin\omega t, 0)$, $B = (0, 0, B)$, $\omega = qB/m$, $v_0 = (0, 0, 0)$, $r_0 = (0, 0, 0)$.

2.69*. Hòn bi thuỷ tinh khối lượng m trượt không ma sát trên mặt cầu bán kính R. Tại vị trí nào và với vận tốc bằng bao nhiêu thì hòn bi rời khỏi mặt cầu.

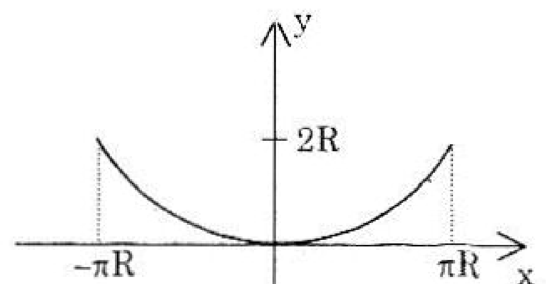
2.70*. Biện luận chuyển động của chất điểm khối lượng m chuyển động không ma sát ở phía trong vòng tròn bán kính R.



271*. Khảo sát chuyển động của hạt khối lượng m chuyển động không ma sát theo đường xycloid lộn ngược diễn tả bằng hệ phương trình:

$$x = R(\gamma + \sin\gamma),\ y = R(1 - \cos\gamma).$$

Ở đây γ là tham số thay đổi từ $-\pi$ đến $+\pi$. Tìm lực phản ứng của các liên kết tác dụng lên hạt đó.



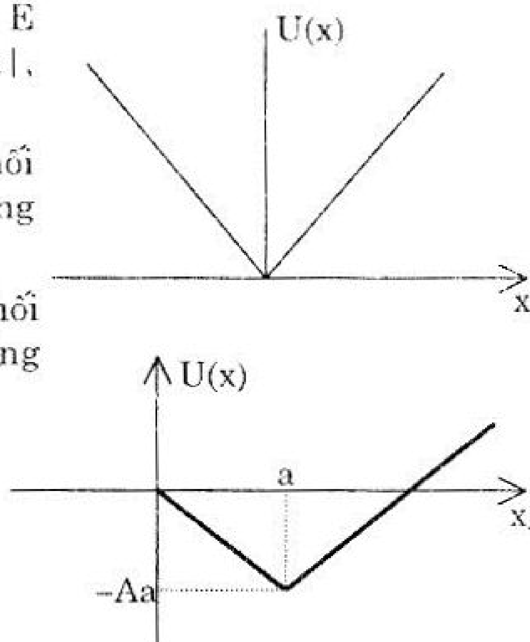
2.72*. Hạt có khối lượng m và năng lượng toàn phần E chuyển động từ môi trường có thế năng U_1 đến môi trường có thế năng U_2. Góc giữa quỹ đạo hạt với pháp tuyến của mặt giới hạn hai môi trường bằng φ_1. Tìm

giá trị và phương vận tốc của hạt trong môi trường thứ hai. So sánh định luật "khúc xạ" với định luật Snelius trong quang hình cho các photon.

2.73*. Hạt có khối lượng m và năng lượng E nằm trong trường thế năng $U(x) = A|x|$, khảo sát chuyển động của hạt.

2.74*. Khảo sát chuyển động của hạt khối lượng m và năng lượng E trong trường thế năng $U(x) = A\text{tg}^2 ax$.

2.75*. Biện luận chuyển động của hạt khối lượng m và năng lượng E trong trường thế năng.



$$2U(x) = \begin{cases} A(|x-a|-a), & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \\ A > 0, & a > 0 \end{cases}$$

Tìm giá trị và phương của lực tác dụng lên hạt và chu kỳ dao động trong trạng thái liên kết, vẽ đồ thị sự phụ thuộc vận tốc của hạt vào thời gian cho các năng lượng khác nhau.

2.76*. Biện luận chuyển động của hạt khối lượng m và năng lượng E = 0 trong thế năng Morse:

$$U(x) = A(e^{-2ax} - 2e^{-ax})$$

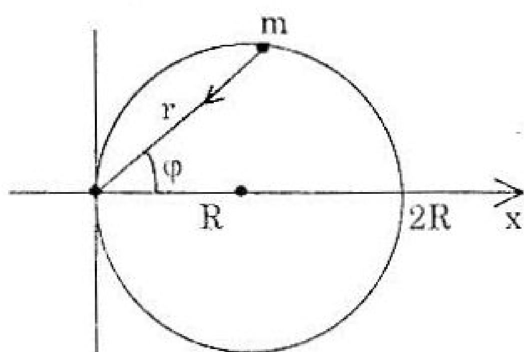
2.77*. Hạt khối lượng m chuyển động trong trường thế năng được xác định như sau:

$$U(r) = \begin{cases} -U_0, & \text{nếu } r \leq R \\ 0, & \text{nếu } r > R \end{cases}$$

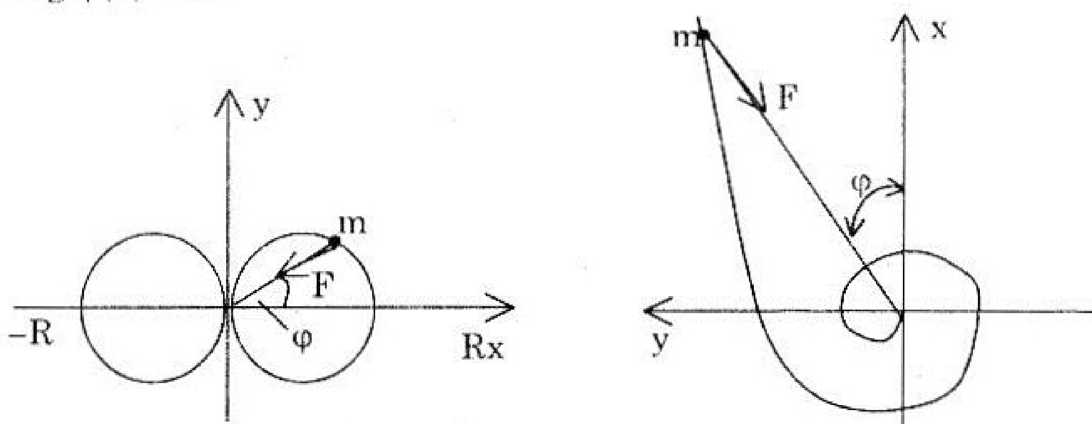
ở đây $U_0 > 0$, khảo sát chuyển động của hạt tùy thuộc vào năng lượng toàn phần và momen xung lượng của hạt.

2.78*. Chất điểm va chạm vào một mặt phẳng, nhẵn dưới một góc xác định và bị phản xạ ra khỏi mặt phẳng đó. Va chạm hoàn toàn đàn hồi. Tìm quỹ tích những điểm, theo đó momen xung lượng là bất biến.

2.79*. Chất điểm khối lượng m chuyển động trong trường xuyên tâm theo quỹ đạo vòng tròn bán kính R và đi qua tâm của trường. Xác định sự phụ thuộc giá trị của lực tác dụng lên chất điểm vào khoảng cách từ chất điểm đến tâm trường.



2.80*. Tìm nghiệm của bài toán trên trong trường hợp chuyển động theo quỹ đạo hình số 8 có phương trình $r^2 = 2R^2\cos(2\varphi)$. Xác định $\varphi(t)$, giả thiết rằng $\varphi(0) = 0$.



2.81*. Tìm giá trị của lực xuyên tâm gây ra chuyển động cho một chất điểm khối lượng m theo đường xoắn ốc hipecbolic $r = a/\varphi$. Ngoài ra tìm $\varphi(t)$, biết rằng $\varphi(0) = \varphi_0$.

2.82*. Tìm chu kỳ dao động của con lắc toán học phẳng (điểm m treo trên một đoạn chỉ chiều dài l trong trọng trường) phụ thuộc vào biên độ của nó.

2.83*. Tìm hệ thức giữa tọa độ và thời gian của một hạt chuyển động trong trường $U = -\dfrac{\alpha}{r}$ có năng lượng:

a) $E < 0$, b) $E > 0$, c) $E = 0$.

2.84*. Giả thiết rằng lực hấp dẫn trong định luật vạn vật hấp dẫn tỷ lệ nghịch với 7 lập phương của khoảng cách, khi đó chuyển động của các hành tinh sẽ như thế nào ?

2.85*. Tìm khoảng thời gian cần thiết để "hành tinh" cho trong bài toán trên có khối lượng m, năng lượng E và mômen xung lượng $M < \sqrt{2m\alpha}$ rơi vào tâm lực, nếu biết rằng tại thời điểm t = 0, hành tinh nằm cách tâm lực một khoảng bằng r_0.

2.86*. Khảo sát chuyển động của hạt có khối lượng m, năng lượng E và momen xung lượng M trong trường thế năng:

$$U(r) = -\frac{\alpha_1}{r} + \frac{\alpha_2}{r^2}.$$

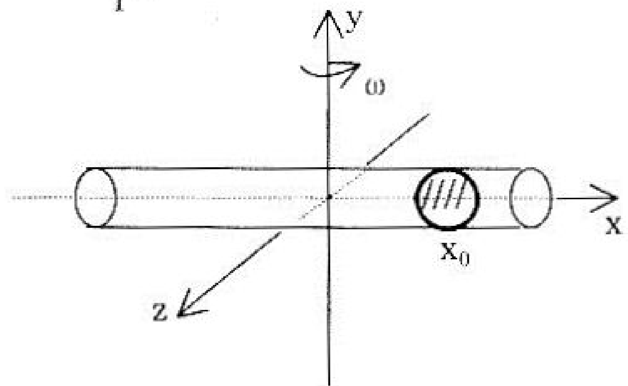
ở đây $\alpha_1, \alpha_2 > 0$. Tìm phương trình quỹ đạo của hạt.

2.87*. Khi người ta bổ sung vào thế năng $U = -\dfrac{\alpha}{r}$ $(\alpha > 0)$, một đại lượng $\delta U(r)$ nhỏ, quỹ đạo chuyển động hữu hạn của hạt trong trường này không còn đóng kín nữa và sau mỗi "chu kỳ" chuyển động điểm cực

cận lại dịch chuyển một góc nhỏ $\delta\varphi$. Xác định $\delta\varphi$ cho :

a) $\delta U = \frac{\beta}{r^2}$ b) $\delta U = \frac{r}{r^3}$.

2.88*. Chất điểm khối lượng m đặt trong ống chuyển động với vận tốc góc ω quanh trục vuông góc với ống đó. Tìm chuyển động của chất điểm. Nếu hệ số ma sát của chất điểm lên thành ống bằng f. Bỏ qua ảnh hưởng của trường hấp dẫn.



2.89*. Hai người đi săn trong vùng rừng Hoà Bình, người thứ nhất bắn vào một con lợn rừng khi nó đang đứng ở vị trí phía tây, và người thứ hai bắn khi con lợn đó đứng ở phía nam. Cả hai đều bắn không trúng và biện bạch rằng sở dĩ bắn không trúng do tồn tại lực Coriolis, người nào có quyền giải thích như vậy. Tính độ chênh lệnh của đường đạn, biết rằng vận tốc của đạn khi ra khỏi nòng v = 300m/s, thời gian bay 1s và vĩ độ nơi săn là $\varphi = 21^0$ vĩ bắc.

2.90*. Tại vĩ độ φ, con lắc toán học dao động với độ lệch nhỏ hơn rất nhiều so với chiều dài l của nó. Hãy tìm chuyển động của con lắc khi tính đến ảnh hưởng chuyển động quay của quả Đất (con lắc Foucault), nhưng trong các phương trình thu được ta bỏ qua các số hạng chứa ω^2, ở đây ω là vận tốc góc quả Đất.

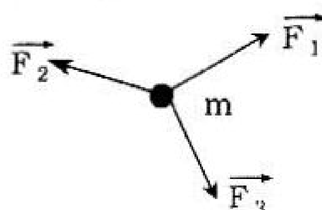
Con lắc Foucault đặt trên xích đạo có quay quanh trục thẳng đứng không ?

PHẦN 3 - TĨNH HỌC

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

CÂN BẰNG CỦA VẬT RẮN KHÔNG CÓ CHUYỂN ĐỘNG QUAY QUANH MỘT TRỤC

I. Cân bằng của chất điểm :



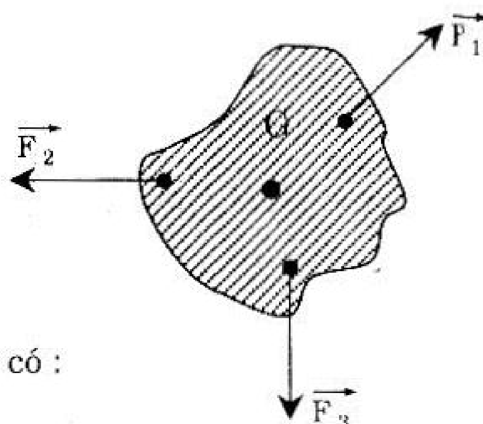
$$\sum \overrightarrow{F_i} = \vec{0}.$$

II. Cân bằng của vật rắn không có chuyển động quay quanh một trục :

$$\sum \overrightarrow{F_G} = \vec{0}.$$

($\sum \overrightarrow{F_G}$:tổng các lực ngoài tác dụng vào vật, được tịnh tiến về khối tâm).

III. Các hệ quả:



1. Quy tắc hợp lực đồng quy

Trượt các lực tới điểm đồng quy

Xác định hợp lực theo quy tắc cộng các vec tơ lực.

2. Quy tắc hợp lực song song

* Hợp lực của hai lực song song cùng chiều có :

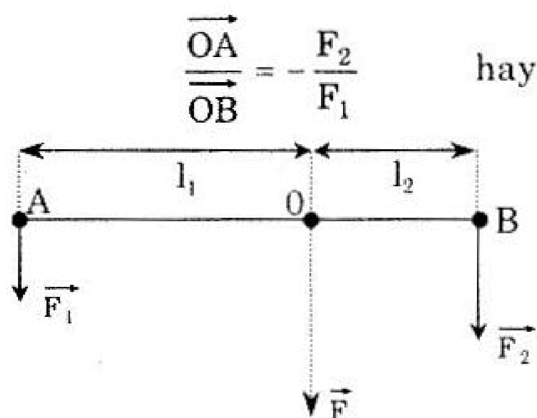
– Phương song song với hai lực.

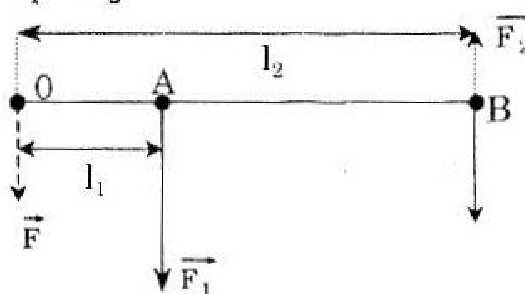
– Cùng chiều với hai lực.

– Độ lớn bằng tổng độ lớn hai lực : $F = F_1 + F_2$.

– Giá chia trong đoạn thẳng nối hai giá của lực thành phần theo tỉ số tỉ lệ nghịch với hai lực :

$$\frac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{OB}} = -\frac{F_2}{F_1} \quad \text{hay} \quad \frac{F_2}{F_1} = \frac{l_1}{l_2}$$





* Hợp lực của hai lực song song ngược chiều có :

- Phương song song với hai lực.
- Cùng chiều với lực lớn hơn.
- Độ lớn bằng hiệu độ lớn hai lực : $F = |F_1 - F_2|$
- Giá chia ngoài đoạn thẳng nối hai giá của lực thành phần theo tỉ số tỉ lệ nghịch với hai lực.

* Tọa độ của khối tâm (trọng tâm)

Gọi $\overrightarrow{R_i}$ là bán kính véc tơ từ O đến một chất điểm m_i. Người ta chứng minh được khối tâm của hệ chất điểm m_1, m_2,...., m_n xác định bởi :

$$\vec{R} = \frac{\sum m_i \overrightarrow{R_i}}{\sum m_i} = \frac{m_1\overrightarrow{R_1} + m_2\overrightarrow{R_2} + ... + m_n\overrightarrow{R_n}}{m_1 + m_2 + ... + m_n}$$

hình chiếu trên các trục tọa độ:

$$x = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}; \quad y = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}; \quad z = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}.$$

CÂN BẰNG CỦA VẬT RẮN CÓ TRỤC QUAY CỐ ĐỊNH

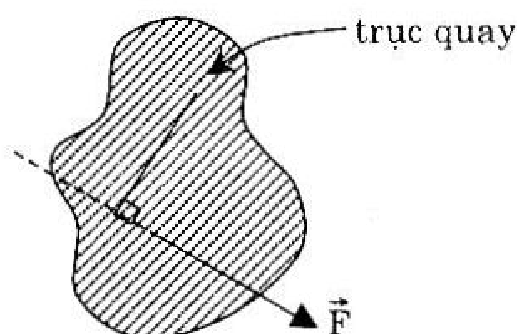
I. Momen lực

$M = F.d$

Đơn vị : F: Newton

d : mét

M : newton – mét



II. Quy tắc momen

Khi vật thể có thể quay quanh một trục giữ chặt nhưng lại đứng yên cân bằng, tổng các momen lực làm quay vật theo một chiều bằng tổng các momen lực làm quay vật theo chiều ngược lại.

$\sum M = \sum M'$

Chú ý: Quy tắc momen cũng được áp dụng cho cả trường hợp vật không có trục quay cố định nhưng có trục quay tạm thời, tùy theo vị trí của vật và thời điểm khảo sát.

III. Điều kiện cân bằng của vật quay

$\overrightarrow{\sum F} = \vec{0}$

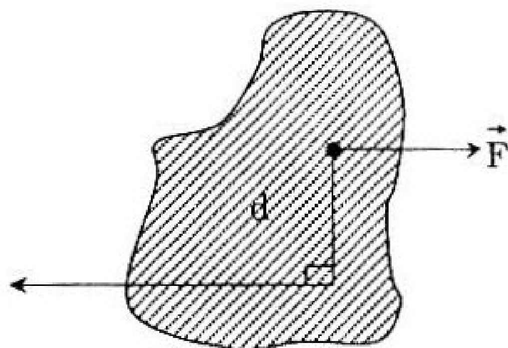
$\sum M = \sum M'$

$v_0 = 0; \omega_0 = 0.$

ĐIỀU KIỆN CÂN BẰNG TỔNG QUÁT CỦA VẬT RẮN

I. Ngẫu lực : $M = F.d$

(M : momen của ngẫu lực đối với trục quay bất kỳ vuông góc với mặt phẳng ngẫu lực).



II. Điều kiện cân bằng tổng quát của vật rắn

– Hệ lực bất kỳ tác dụng lên vật rắn tương đương với :

+ Một tổng lực $\sum \vec{F}$ đặt tại G

+ Một ngẫu lực

– Điều kiện cân bằng tổng quát của vật rắn :

$$\overrightarrow{\sum F} = \vec{0}$$

$$\sum M = 0$$

$$v_0 = 0; \omega_0 = 0$$

($\sum M$: tổng đại số các momen đối với một trục quay bất kỳ).

CÁC DẠNG CÂN BẰNG

I. Cân bằng của vật tựa lên một điểm hoặc một trục cố định :

– Cân bằng không bền : Khối tâm có vị trí cao nhất so với các vị trí khác của nó.

II. Cân bằng của vật dựa trên mặt chân đế :

– Điều kiện cân bằng : Giá của trọng lực đi qua mặt chân đế.

– Mức vững vàng của cân bằng : Cân bằng càng vững khi :

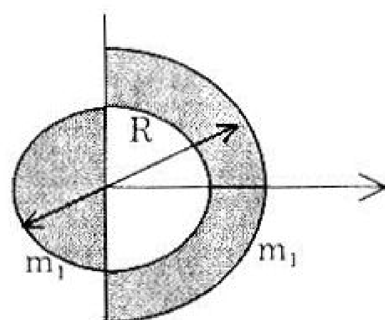
+ Khối tâm càng thấp

+ Diện tích mặt chân đế càng lớn.

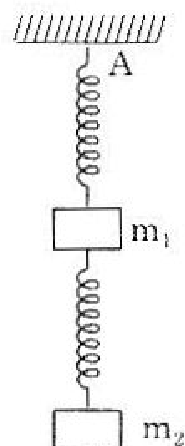
II. BÀI TẬP

3.1*. Người ta treo nửa mặt tròn bán kính R cắt từ tôn lá trên một sợi dây buộc vào góc của nó. Xác định góc lệch của đường kính giới hạn nửa mặt tròn đó đến phương thẳng đứng của sợi dây.

3.2*. Người ta cắt từ nửa mặt tròn bằng tôn lá bán kính R một nửa mặt tròn đồng tâm có bán kính r nhỏ hơn và tiếp đó hàn các góc của chúng lại với nhau, bán kính của nửa mặt tròn nhỏ phải như thế nào để khối tâm của hệ trùng với tâm điểm các vòng tròn giới hạn diện tích của nó.

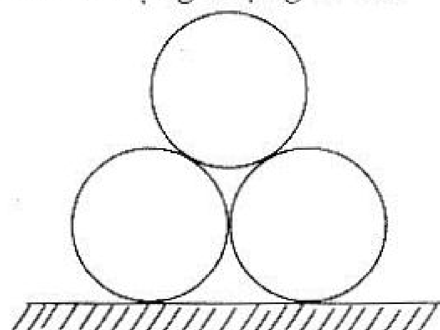


3.3*. Người ta treo hai vật có khối lượng m_1 và m_2 trên hai lò so. Khoảng cách của vật phía dưới đến điểm treo A có bị thay đổi không, nếu ta thay đổi vị trí của hai vật ? Khối lượng của các lò so, chiều dài của chúng cũng như các hệ số đàn hồi là bất kỳ.



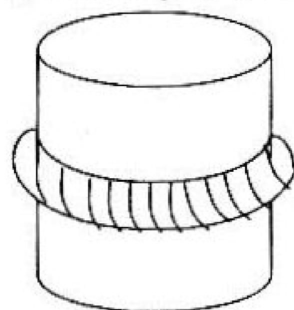
3.4*. Một dây lò so có khối lượng m và hệ số đàn hồi k treo tự do trên một cái móc. Xác định độ giãn dưới tác dụng của chính trọng lượng lò so.

3.5*. Ba vật hình trụ có cùng bán kính như nhau nằm trên mặt phẳng nằm ngang. Hệ số ma sát trượt của các vật lên mặt phẳng bằng f và giữa chúng với nhau bằng h. Không có ma sát lăn. Các hệ số f và h phải thoả mãn những điều kiện gì để hệ nằm trong cân bằng.

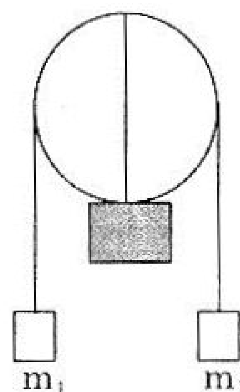


3.6*. Tìm phương trình đường cong của một sợi dây đàn hồi, nhưng không co giãn, được treo tự do hai đầu vào hai điểm có khoảng cách ngắn hơn chiều dài sợi dây.

3.7*. Người ta lồng một vòng đai làm từ sợi dây to lên một vật hình trụ đứng. Khối lượng sợi dây bằng m, và hệ số ma sát giữa vòng đai và mặt hình trụ bằng f. Tìm lực căng cực tiểu cần thiết của sợi dây để vòng đai không bị tụt khỏi hình trụ.



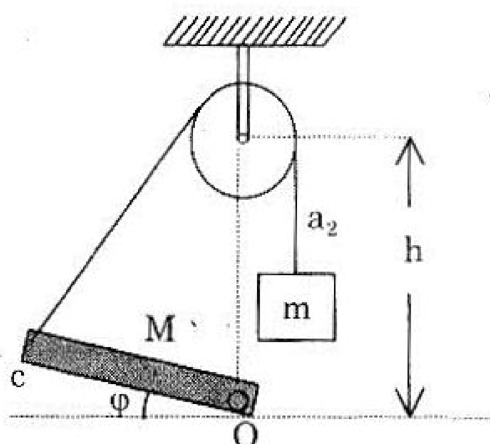
3.8*. Người ta cưa một vật hình trụ đồng nhất khối lượng m dọc theo trục đối xứng thành hai nửa. Tiếp đó ốp chúng lại với nhau, đặt lên một đế nhẵn nằm ngang và vắt ngang qua nó một sợi dây với hai đầu buộc vào hai vật cùng có khối lượng như nhau m_1. Mặt bị cưa của hình trụ đặt dọc theo mặt phẳng thẳng đứng. Xác định giá trị cực tiểu của khối lượng m_1 cần thiết để giữ cho hai nửa hình trụ tiếp xúc nhau theo toàn mặt bị cưa.



3.9*. Người ta treo một vật khối lượng M trên một sợi dây được cuốn một số vòng vào một trục hình trụ bằng sắt nằm ngang. Hệ số ma sát giữa sợi dây và trục bằng f. Cần phải buộc vào đầu dây còn lại một khối lượng m bằng bao nhiêu, để sợi dây không chuyển động trượt trên trục? Hệ số ma sát tĩnh giữa sợi dây và mặt trục sắt f = 0,7. Nếu sợi dây được cuốn năm vòng thì người ta có thể giữ lại một vật có khối lượng $M = 10^3$ kg được không?

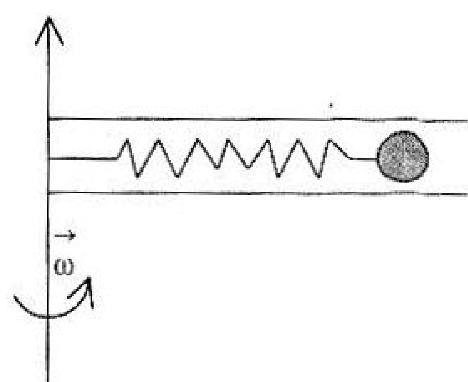
3.10*. Người ta đặt hai quả cầu lần lượt có bán kính $r_1 = 1/3R$ và $r_2 = 1/4R$ bên trong một chỏm cầu bán kính R. Hai quả cầu đều cấu tạo từ một loại vật liệu. Giả thiết ma sát là không đáng kể và có thể bỏ qua, hãy tìm vị trí cân bằng.

3.11*. Một thanh đồng chất khối lượng M và chiều dài l có thể quay không ma sát quanh trục nằm ngang O xuyên qua một đầu của nó. Đầu còn lại của thanh được buộc một sợi dây không trọng lượng và vắt qua một ròng rọc. Đầu còn lại của sợi dây buộc một vật khối lượng m < M. Trục của ròng rọc (ta bỏ qua kích thước của nó) nằm phía trên điểm O ở độ cao h. Tìm góc nghiêng φ của thanh ở trạng thái cân bằng.

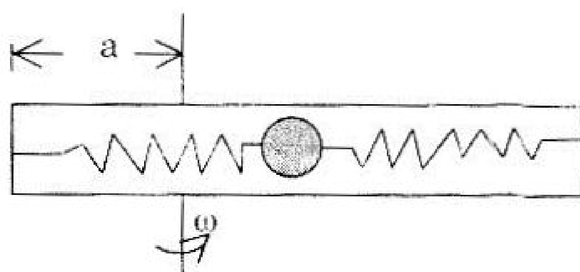


3.12*. Tìm phương trình của mặt phẳng chất lỏng cân bằng phiếm định của một chất lỏng đựng trong bình hình trụ quay quanh trục đối xứng với vận tốc góc ω không đổi.

3.13*. Một ống mỏng quay quanh trục quay thẳng đứng. Bên trong ống có một quả cầu khối lượng m được móc vào một dây lò so và đầu còn lại của lò so móc vào trục quay. Chiều dài tự do của lò so bằng l_0 và hệ số đàn hồi bằng k. Tìm vị trí cân bằng của quả cầu so với ống phụ thuộc vào vận tốc góc ω. Vẽ đồ thị và biện luận kết quả thu được cho vận tốc $\omega \approx \sqrt{\frac{k}{m}}$ và lớn hơn.



3.14*. Quả cầu khối lượng m được móc giữa hai lò so bị kéo giãn đặt trong một ống có chiều dài 2l. Các lò so có cùng chiều dài tự do và hệ số đàn hồi như nhau bằng k. Ống quay quanh một trục vuông góc với nó và



đi qua vị trí cách đầu ống một khoảng a (hình vẽ). Xác định vị trí cân bằng của quả cầu như hàm phụ thuộc vào vận tốc quay ω của hệ. Bỏ qua ma sát giữa quả cầu và thành ống.

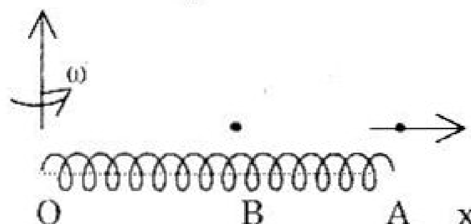
3.15*. Có 3 chất điểm khối lượng m_1, m_2, và m_3 đặt tại các đỉnh của một tam giác đều cạnh bằng a. Các điểm tương tác nhau bằng lực hấp dẫn. Hệ này phải quay quanh trục như thế nào và với vận tốc bằng bao nhiêu để khoảng cách giữa các chất điểm không bị thay đổi.

3.16*. Lò so có khối lượng m và hệ số đàn hồi k quay quanh một trục vuông góc với trục lò so và đi qua một đầu của nó với vận tốc góc ω.

Tính:

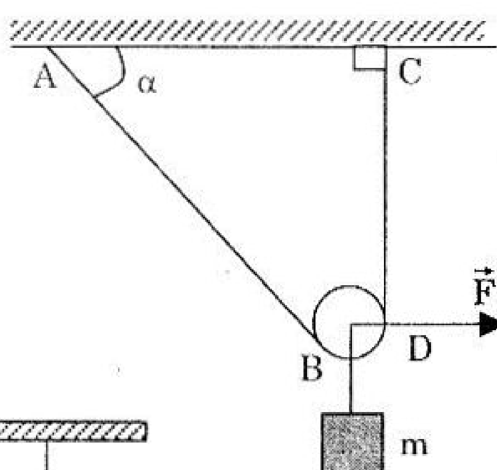
a) Chiều dài của lò so quay, nếu ở trạng thái đứng yên chiều dài tự do của nó bằng l_0.

b) Năng lượng của chuyển động quay.

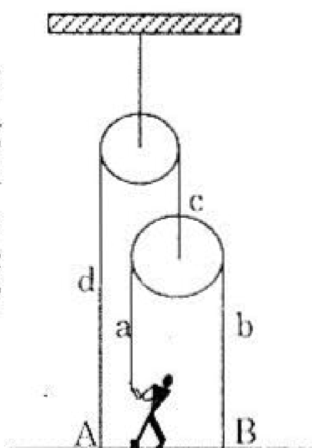


3.17. Một ròng rọc nhỏ có mang một vật khối lượng m = 1kg được đỡ bởi một sợi dây ABCD. Phần CD của sợi dây thẳng đứng, phần BA nghiêng một góc 60^0 so với đường nằm ngang. Ròng rọc cân bằng dưới tác dụng của lực $\vec{F}$ nằm ngang.

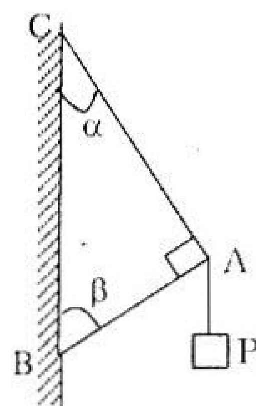
Tính F và lực căng của dây. Khối lượng ròng rọc không đáng kể. Lấy $g = 10m/s^2$.



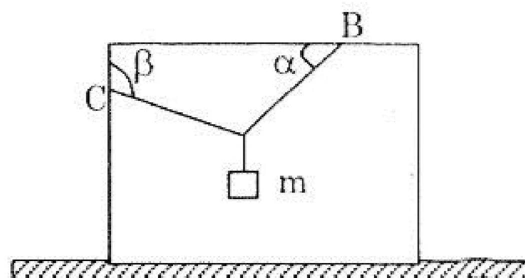
3.18. Một người có trọng lượng $P_1 = 600N$ đứng trên một tấm gỗ có trọng lượng $P_2 = 300N$. Tấm gỗ có chiều dài l treo trên hai ròng rọc như hình vẽ. Người cần phải kéo dây a với lực bằng bao nhiêu để tấm gỗ cân bằng? Bỏ qua trọng lượng của ròng rọc.



3.19. Các thanh nhẹ AB và BC nối với nhau và với tường nhờ các bản lề. Tại A có treo một trọng vật P = 100N. Tìm lực đàn hồi của các thanh AB và AC nếu cho $\alpha = 30^0$, $\beta = 60^0$.

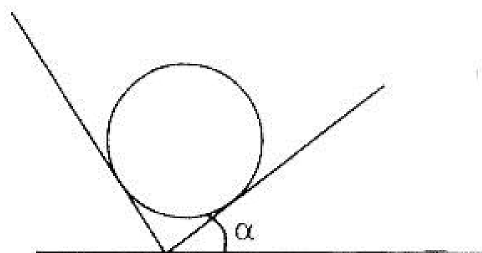


3.20. Treo một vật có khối lượng m = 5kg vào giá đỡ như hình vẽ. Tính lực căng của các dây treo AB, AC khi $\alpha = 60^0$; $\beta = 135^0$, $g = 10\ m/s^2$.



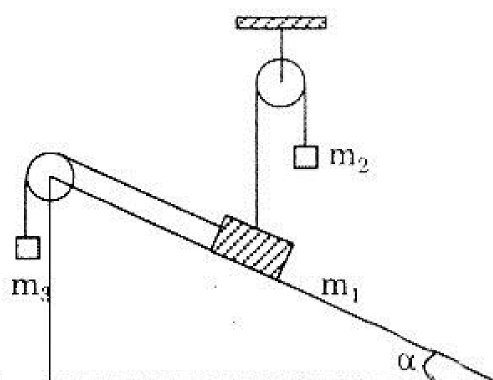
3.21. Một quả cầu sắt có khối lượng 10kg nằm trên hai mặt phẳng nghiêng trơn vuông góc với nhau. Tìm lực nén của quả cầu lên mỗi mặt nghiêng, trong hai trường hợp.

a) $\alpha = 40^0$. b) $\beta = 60^0$.



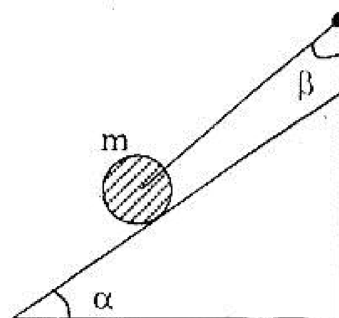
3.22. Cho hệ cơ như hình vẽ. $m_1 = 3kg$, $m_2 = 1kg$, $\alpha = 30^0$.

Tính m_3 và lực nén của m_1 lên mặt nghiêng khi hệ cân bằng.



3.23. Quả cầu m có khối lượng 3kg được giữ trên mặt phẳng nghiêng nhờ một dây treo như hình vẽ. Cho biết sức căng của dây bằng $10\sqrt{3}$ N và có góc nghiêng $\alpha = 30^0$.

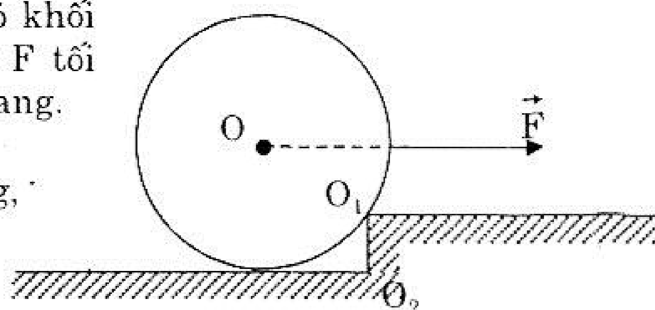
Tính góc β và lực nén của quả cầu lên mặt nghiêng. Lấy $g = 10\ m/s^2$.



3.24. Một hình trụ bằng kim loại có khối lượng m, bán kính R. Tìm lực F tối thiểu để kéo hình trụ lên bậc thang.

Cho biết : $O_1O_2 = \dfrac{R}{2}$, m = 100 kg,

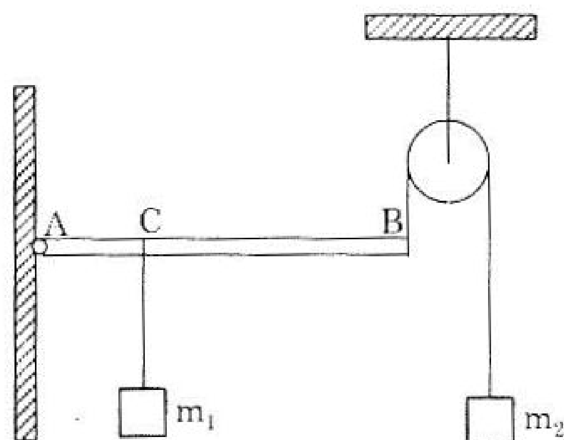
$g = 10 m/s^2$.



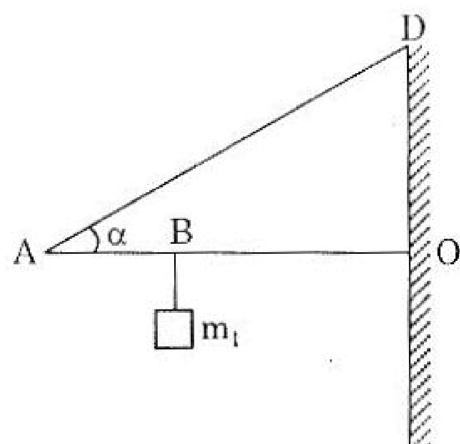
3.25. Thanh đồng chất AB có khối lượng 100g có thể quay quanh bản lề A.

Cho biết : $m_1 = 500g$, $m_2 = 150g$, BC = 20 cm, $g = 10\ m/s^2$.

Tính chiều dài AB khi thanh cân bằng như hình vẽ.



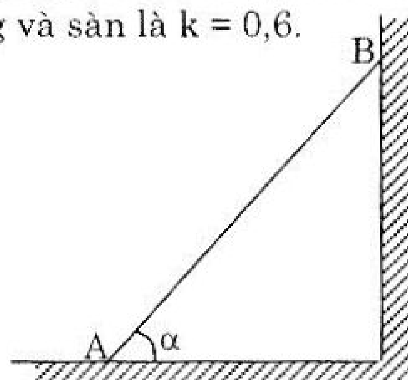
3.26. Thanh OA = 60 cm đồng chất, tiết diện đều có trọng lượng 4N được đặt ngang nhờ đóng vào điểm O và buộc chặt vào dây AD hợp với thanh góc $\alpha = 45^0$. Treo quả cân có khối lượng m_1 = 0,6 kg tại điểm B (AB = 20cm). Tính lực căng của sợi dây, phản lực $\vec{R}$ của tường tại O và góc β hợp với $\vec{R}$ và tường. Lấy g = 10m/s^2.



3.27. Một thang AB có khối lượng m = 20kg được dựa vào tường trơn nhẵn dưới góc nghiêng α. Hệ số ma sát giữa thang và sàn là k = 0,6.

a) Thang đứng cân bằng, tìm các lực tác dụng lên thang nếu $\alpha = 45^0$.

b) Tìm giá trị của α nếu thang đứng yên không trượt trên sàn. Cho biết chiều dài của thang AB = 2m, g = 10m/s^2.



PHẦN 4 - CƠ HỌC CHẤT LƯU

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

CHUYỂN ĐỘNG ỔN ĐỊNH CỦA CHẤT LỎNG

I. Phương trình liên tục

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{S_1}{S_2}$$

* v_1, S_1 : vận tốc chảy và diện tích tiết diện ống ở vị trí thứ nhất,
* v_2, S_2 : vận tốc chảy và diện tích tiết diện ống ở vị trí thứ hai.

II. Định luật Becnuli (Bernoulli)

1. ***Trường hợp tổng quát :***

$$\rho g h_2 + p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 = gh_1 + p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2$$

hay $$\rho g h + p + \frac{1}{2}\rho v^2 = const$$

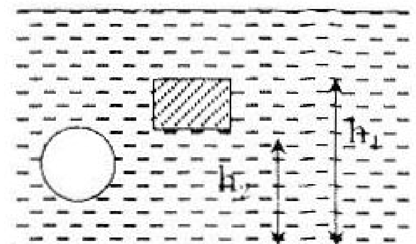
* p : áp suất tĩnh.
* $\frac{1}{2}\rho v^2$: áp suất động
* $\rho g h$: áp suất trọng lực.

2. ***Trường hợp đặc biệt:***

- Ống nằm ngang : $p + \frac{1}{2}\rho v^2 = const$
- Chất lỏng yên tĩnh : $p_2 = p_1 + \rho g (h_1 - h_2)$.

III. Định luật Acsimet (Archimède)

$$f_A = (p_2 = p_1)S + \rho g S (h_1 - h_2) = \rho V g$$



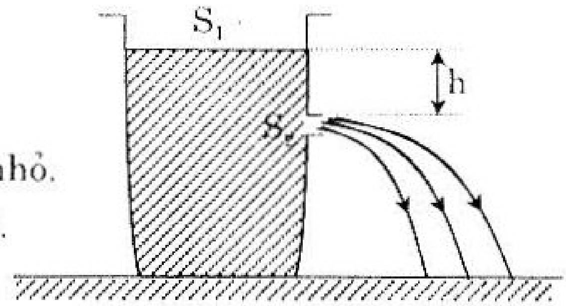
* h_1, p_1 : độ cao từ đáy và áp suất ngang từ mặt trên của vật chìm.
* h_2, p_2 : độ cao từ đáy và áp suất ngang từ mặt dưới của vật chìm.
* S : Tiết diện ngang của vật,
* V : Thể tích của vật.

IV. Công thức Torixenli (Torricelli)

$$v = \sqrt{2gh} \quad (S_2 << S_1)$$

* v : vận tốc phun của chất lỏng qua lỗ nhỏ.

* h : khoảng cách giữa mặt thoáng và lỗ.

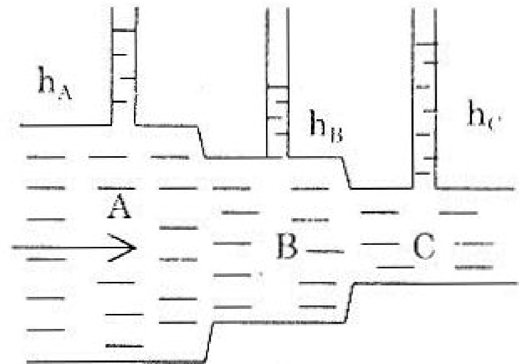


II. BÀI TẬP

4.1. Cho một ống hình trụ đặt nằm ngang gồm ba phần A, B, C có tiết diện S_A, S_B, S_C khác nhau. Trong ống có nước chảy từ A đến C.

a) So sánh áp suất tĩnh, áp suất động, áp suất toàn phần tại các phần A, B và C.

b) Đặt tại B một ống áp kế, tại C một ống Pitô (ống có góc vuông). Thực nghiệm đo được: h_B = 3cm, h_C = 8cm. Tìm vận tốc của nước tại B.



c) Người ta có thể đo vận tốc của nước tại B nhờ một phương pháp khác bằng cách bỏ ống Pitô đi và đặt tại A một ống áp kế. Đo thấy h_A = 6,7cm. Biết S_A = 20cm^2; S_B = 10cm^2, tính vận tốc nước tại B, so sánh với kết quả ở câu b).

4.2. Tìm vận tốc chảy của dòng khí CO_2 trong ống dẫn, biết rằng cứ sau nửa giờ khối lượng khí chảy qua một tiết diện ngang của ống bằng 0,51kg. Khối lượng riêng của khí bằng 7,5 kg/m^3. Đường kính của ống bằng 2cm. Coi khí là chất lỏng lý tưởng.

4.3. Ở đáy một bình hình trụ có một lỗ thủng đường kính d = 1cm. Đường kính của bình là D = 0,5m. Tìm sự phụ thuộc của vận tốc hạ mức nước trong bình vào độ cao h của mực nước. Áp dụng bằng số cho trường hợp h = 0,2m.

4.4. Trên bàn có đặt một bình nước, thành bình có một lỗ nhỏ nằm cách đáy bình một đoạn h_1 và cách mức nước một đoạn h_2. Mực nước trong bình được giữ không đổi, hỏi tia nước phụt xuống mặt bàn cách lỗ một khoảng L bằng bao nhiêu (theo phương nằm ngang)?

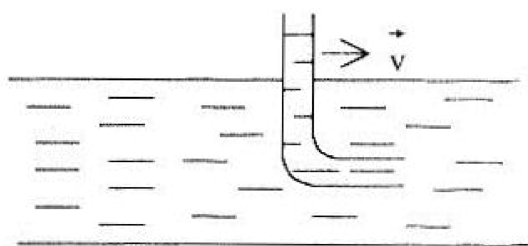
4.5. Người ta đặt một bình nước có thành thẳng đứng trên một mặt bàn nằm ngang. Trên thành bình có dùi hai lỗ nhỏ. Các lỗ cùng nằm trên một đường thẳng đứng.Giả sử tiết diện của bình rất rộng so với tiết diện của các lỗ, sao cho mức nước trong bình coi như không đổi.

a) Chứng minh rằng, muốn cho hai tia nước rơi xuống cùng một điểm trên mặt bàn thì khoảng cách từ một lỗ đến mức nước trong bình phải bằng khoảng cách từ lỗ kia đến mặt bàn.

b) Muốn cho tia nước phun ra xa nhất thì phải đục lỗ tại vị trí nào ?

c) Chứng minh rằng vận tốc của các tia nước trên mặt bàn bằng nhau.

4.6. Người ta dịch chuyển một ống cong dọc theo một máng chứa đầy nước với vận tốc v = 8,33m/s. Tìm độ cao của mức nước dâng lên trong ống.



4.7. Giữa đáy một gầu nước hình trụ bị thủng một lỗ nhỏ. Mức nước ở trong gầu cách đáy gầu H = 30cm. Hỏi nước chảy qua lỗ với vận tốc bằng bao nhiêu trong các trường hợp sau:

a) Gầu nước đứng yên.

b) Gầu được nâng lên đều.

c) Gầu chuyển động với gia tốc là $1{,}2m/s^2$ lên trên rồi xuống dưới.

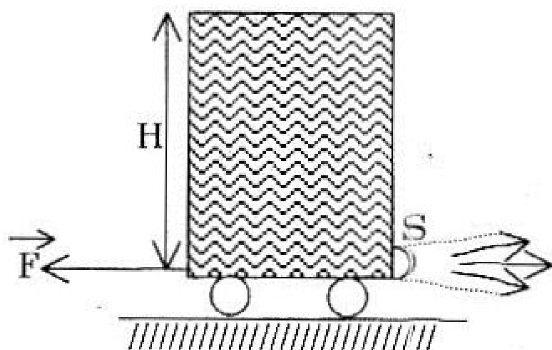
d) Gầu chuyển động theo phương nằm ngang với gia tốc $1{,}2m/s^2$.

4.8. Một bình hình trụ cao h, diện tích đáy S chứa đầy nước. Ở đáy bình có một lỗ diện tích S_1. Hỏi:

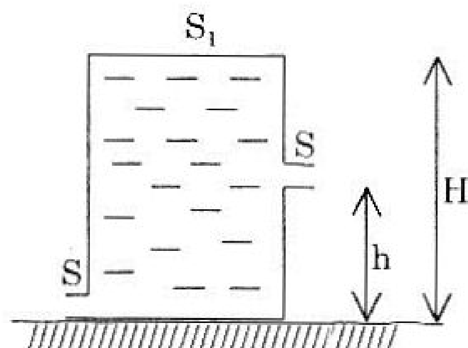
a) Độ cao mực nước phụ thuộc thời gian như thế nào khi mở lỗ. Bỏ qua độ nhớt của nước.

b) Sau bao lâu nước ở trong bình chảy ra hết.

4. 9. Người ta gắn một bình hình trụ chứa đầy chất lỏng vào một chiếc xe lăn trên bàn. Độ cao của bình là H, ở phía dưới (gần đáy) của thành bình có khoét một lỗ diện tích S. Cho khối lượng riêng của chất lỏng là ρ, hãy tính lực tác dụng lên bình làm chiếc xe chuyển động ngược chiều với chiều phụt ra của chất lỏng khi mở lỗ (Bỏ qua ma sát giữa bánh xe và mặt bàn).



4.10. Trên bề mặt một phiến nước đá phẳng nằm ngang người ta đặt một bình có khoét hai lỗ nhỏ ở hai phía đối nhau, một lỗ khoét ở đáy bình và lỗ kia khoét ở độ cao h = 50cm. Diện tích các lỗ bằng nhau và bằng $S = 1.000mm^2$. Bình chứa nước tới độ cao H = 100cm. Tìm gia tốc của bình ngay sau khi mở các lỗ. Bỏ qua ma sát giữa đá và bình. Khối lượng của bình nhỏ không đáng kể. Biết tiết diện ngang của bình là $S_1 = 0{,}5m^2$.



PHẦN 5 - VẬT LÝ PHÂN TỬ VÀ NHIỆT HỌC

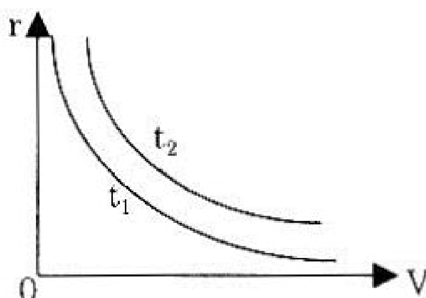
I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

CÁC ĐỊNH LUẬT VỀ KHÍ LÝ TƯỞNG

I. Định luật Bôi – Mariôt (Boyle–Mariotte)

1. *Công thức :* $\frac{P_2}{P_1} = \frac{V_1}{V_2}$ ⇔ $p_1V_1 = p_2V_2$ ⇔ $pV = const$

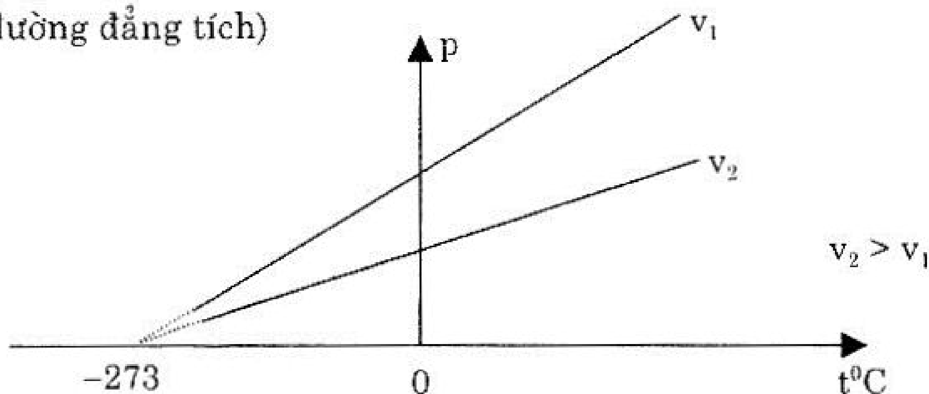
2. ***Đồ thị*** (đường đẳng nhiệt)



II. Định luật Sac lơ (Charles)

1. *Công thức :* $\frac{P - P_0}{P_0 t} = \frac{1}{273}$ ⇔ $p = p_0(1 + t)$

2. ***Đồ thị*** (đường đẳng tích)



3. ***Nhiệt giai tuyệt đối :***

– Định nghĩa nhiệt độ tuyệt đối : $T(K) = t(^oC) + 273$

– Định luật Saclơ : $\frac{P_2}{P_1} = \frac{T_2}{T_1}$.

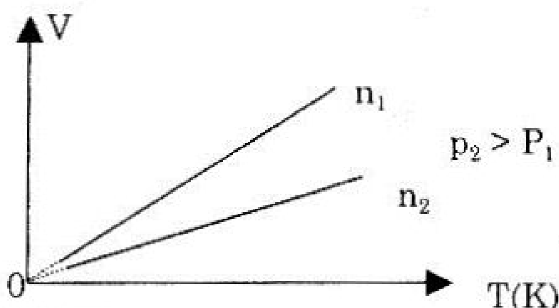
III. Định luật Gay Luytxắc (Gay Lussac)

1. *Công thức :* $\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}$.

III. Định luật Gay Luytxăc (Gay Lussac)

1. ***Công thức :*** $\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}$.

2. ***Đồ thị*** (đường đẳng áp).



IV. Định luật Đantôn (Dalton):

$$p = p_1 + p_2 + ... + p_n = \sum_1^n p_i .$$

PHƯƠNG TRÌNH TRẠNG THÁI CỦA KHÍ LÝ TƯỞNG, PHƯƠNG TRÌNH MENĐÊLÊEP – CLAPAYRON)

I. Phương trình trạng thái :

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2} \qquad \text{hay} \qquad \frac{pV}{T} = \text{const} .$$

2. Phương trình Menđêlêep – Clapâyrôn

1. ***Trường hợp 1 mol khí :*** $p_\mu V_\mu = RT$

(R: hằng số khí lý tưởng)

R = 8,31 J/mol.K

R = 0,082 atm.lít/mol.K

2. ***Trường hợp khối khí bất kỳ :*** $pV = \frac{m}{\mu}RT = nRT$.

PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN CỦA KHÍ LÝ TƯỞNG

I. Phương trình cơ bản của khí lý tưởng :

$$p = \frac{1}{3}n_0m\overline{v^2}$$

p : áp suất của khí

n_0 : mật độ phân tử khí.

m : khối lượng của một phân tử khí.

$\overline{v^2}$: Giá trị trung bình của các phân tử khí

$$p = \frac{2}{3} n_0 \overline{W_d}$$

$\overline{W_d} = \frac{1}{2} m\overline{v^2}$: động năng trung bình của các phân tử.

II. Nhiệt độ và động năng trung bình của phân tử khí :

$$\overline{W_d} = \frac{3}{2} kT$$

$k = \frac{R}{N_A} = 1,38.10^{-34} J.K^{-1}$: hằng số Bônđơman (Boltzmann).

III. Các hệ quả :

$$\bar{v} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$$

$$p = n_0kT.$$

NỘI NĂNG VÀ SỰ BIẾN ĐỔI NỘI NĂNG

I. Nội năng :

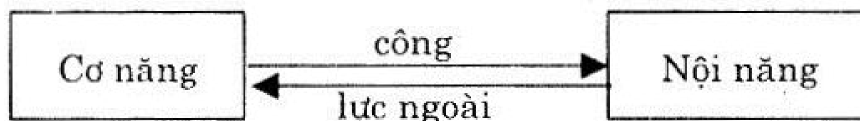
Động năng của phân tử + Thế năng tương tác giữa các phân tử = Nội năng của vật.

$$\Rightarrow \quad U = f(T, V)$$

Chú ý: Với chất khí, nội năngU có thể coi là chỉ phụ thuộc nhiệt độ của khí.

II. Cách biến đổi nội năng :

1. Thực hiện công :



2. Truyền nhiệt lượng :

- Công thức tính nhiệt lượng : $Q = cm(t_2 - t_1)$

  c: nhiệt dung riêng

  m: khối lượng

  t_1 : nhiệt độ đầu

  t_2 : nhiệt độ sau

– Phương trình cân bằng nhiệt $Q_1 + Q_2 = 0$

Quy ước : $Q > 0$: nhiệt lượng thu vào

$Q < 0$: nhiệt lượng tỏa ra.

NGUYÊN LÝ I CỦA NHIỆT ĐỘNG LỰC HỌC

I. Thí nghiệm Jun (Joule)

– Ý nghĩa : Minh họa của định luật bảo toàn và chuyển hóa năng lượng.

– Đương lượng cơ của nhiệt : 1 cal = 4,186 J.

II. Nguyên lý I của nhiệt động lực học

$$Q = A + \Delta U$$

Q : Nhiệt lượng truyền cho vật

A : Công do vật thực hiện

ΔU : Độ biến thiên nội năng của vật.

ÁP DỤNG NGUYÊN LÝ I CỦA NHIỆT ĐỘNG LỰC HỌC CHO KHÍ LÝ TƯỞNG

I. Nội năng và công của khí lý tưởng

1. *Nội năng của khí lý tưởng :*

– Trường hợp của khí đơn nguyên tử : $U = \frac{3}{2}nRT$ (n: số mol khí)

– Trường hợp tổng quát : $U = nc_vT$

c_v : nhiệt dung riêng đẳng tích

Chú ý : + Khí đơn nguyên tử : $c_v = \frac{3}{2}R$

+ Khí lưỡng nguyên tử : $c_v = \frac{5}{2}R$.

2. *Biểu thức tính công :*

a. Quá trình đẳng áp : $A = p.\Delta V$

– Khí dãn nở : $\Delta V > 0 \Rightarrow A > 0$

– Khí bị nén : $\Delta V < 0 \Rightarrow A < 0$

b. Quá trình bất kỳ :

– Áp dụng phương pháp vi phân : $A = \sum \Delta A_i = \sum p_i \Delta V_i$

– Dùng giản đồ công (hệ tọa độ p, V)

+ Công tính bằng diện tích giới hạn bởi đường biểu diễn chu trình.

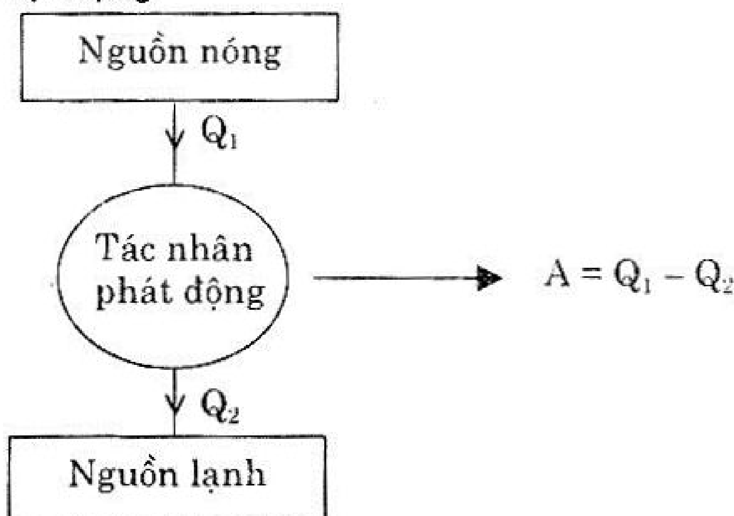
+ Chiều biến đổi của chu trình thuận chiều kim đồng hồ ⇒ $A > 0$; ngược lại ⇒ $A < 0$.

II. Áp dụng nguyên lý I của nhiệt động lực học

1. Quá trình đẳng tích : $Q = \Delta U$
2. Quá trình đẳng áp : $Q = \Delta U + A$
3. Quá trình đẳng nhiệt : $Q = A$
4. Quá trình đoạn nhiệt : $A = -\Delta U$
5. Biến đổi theo chu trình kín : $Q = A$

ĐỘNG CƠ NHIỆT

I. Nguyên tắc hoạt động



II. Hiệu suất của động cơ nhiệt

1. ***Định nghĩa :*** $H = \dfrac{A}{Q_1} = \dfrac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \dfrac{Q_2}{Q_1}$

2. ***Định lý Cacnô :*** $H \le \dfrac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \dfrac{T_2}{T_1}$

$H_m = \dfrac{T_2 - T_1}{T_1}$: hiệu suất của động cơ nhiệt lý tưởng.

III. Nguyên lý II của nhiệt động lực học

– Phát biểu của Clao – diuyt (Clausius) :

Nhiệt không thể tự động truyền từ vật lạnh sang vật nóng hơn.

– Phát biểu của Kenvin (Kelvin) :

Không thể thực hiện được một quá trình tuần hoàn mà kết quả duy nhất là sinh công chỉ do một nguồn nhiệt.

SỰ BIẾN DẠNG CỦA VẬT RẮN

I. Các loại biến dạng

- Biến dạng kéo và biến dạng nén
- Biến dạng cắt (biến dạng trượt)
- Biến dạng uốn.

II. Hệ số đàn hồi – suất đàn hồi

- Hệ số đàn hồi (độ cứng): $k = \frac{F_{dh}}{x}$

F_{dh} : lực đàn hồi

x : độ biến dạng

(k: N/m).

- Suất đàn hồi (suất Iâng (Young) : $E = \frac{kl_0}{S}$

k : hệ số đàn hồi

l_0 : chiều dài ban đầu

S : Diện tích tiết diện ngang

(E : Pa).

III. Giới hạn bền – Hệ số an toàn

- Giới hạn bền của dây: $\sigma_b = \frac{F_b}{S}$

F_b : Lực kéo làm dây đứt

S : Diện tích tiết diện ngang

(σ_b : N/m^2).

- Lực đảm bảo an toàn :

với $1,7 \leq n \leq 10$ người ta quy định $F = \frac{\sigma_b}{n}$.

SỰ NỞ VÌ NHIỆT CỦA VẬT RẮN

I. Công thức nở dài : $l = l_0(1 + \alpha t)$

l : chiều dài ở t° C

l_0 : chiều dài ở 0° C

α : Hệ số nở dài ($10^{-6}K^{-1} \leq \alpha \leq 10^{-5}K^{-1}$).

II. Công thức nở thể tích (nở khối) : $V = V_0 (1 + \beta t)$

V : thể tích ở t^oC

V_0 : thể tích ở 0^oC

β : Hệ số nở thể tích (nở khối) ($\beta \approx 3\alpha$)

III. Hiện tượng căng mặt ngoài. Hiện tượng mao dẫn

1. Lực căng mặt ngoài : $F = \sigma l$

l : Chiều dài đường giới hạn mặt ngoài của chất lỏng

σ : Hệ số căng mặt ngoài (N/m).

2. Hiện tượng mao dẫn :

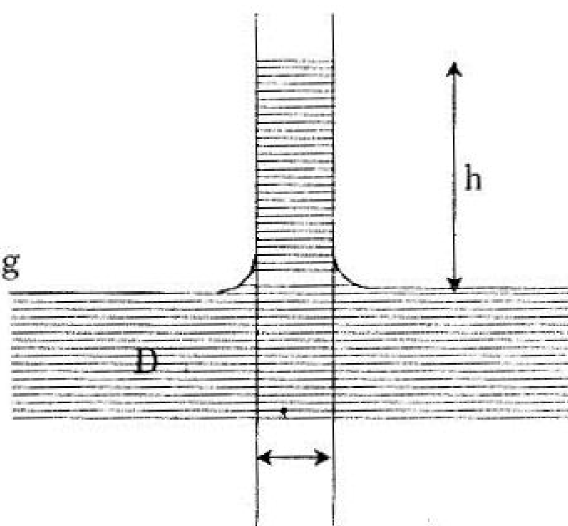
– Độ cao cột chất lỏng trong ống mao dẫn :

$$h = \frac{4\sigma}{gdD}$$

σ : Hệ số căng mặt ngoài

d : Đường kính trong của ống

D : Khối lượng riêng của chất lỏng



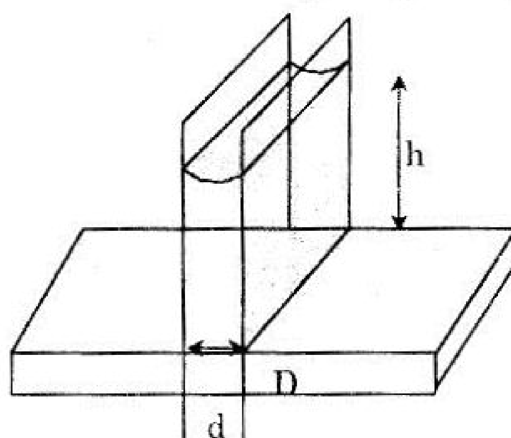
– Độ cao chất lỏng trong khe hẹp giữa hai mặt phẳng song song thẳng đứng :

$$h = \frac{2\sigma}{gdD}$$

σ : Hệ số căng mặt ngoài

d : Bề rộng của khe

D : Khối lượng riêng của chất lỏng



– Áp suất phụ : $p' = \frac{4\sigma}{h}$

p': Áp suất ngay dưới mặt thoáng trong ống mao dẫn

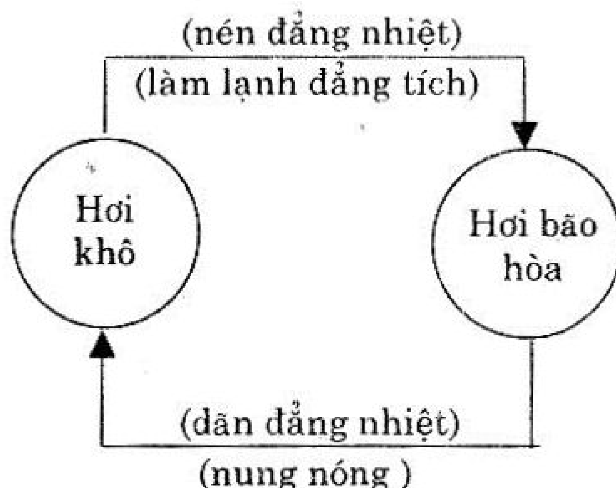
h : Độ dâng hay độ hạ của chất lỏng trong ống

σ : Hệ số căng mặt ngoài.

HƠI BÃO HÒA, HƠI KHÔ, ĐỘ ẨM CỦA KHÔNG KHÍ

I. Hơi bão hòa – Hơi khô

- Hơi cân bằng động với chất lỏng của nó được gọi là hơi bão hòa.
- Hơi mà áp suất của nó nhỏ hơn áp suất hơi bão hòa được gọi là hơi khô.



II. Độ ẩm của không khí :

Công thức tính độ ẩm tương đối : $f(\%) = \dfrac{a}{A}$

a : Độ ẩm tuyệt đối

A: Độ ẩm cực đại

II. BÀI TẬP

5.1. Một ống dài tiết diện nhỏ có một đầu kín, một đầu hở và chứa thủy ngân chiếm một đoạn dài h = 12,5 cm. Nếu dựng ống thẳng đứng, đầu hở lên trên thì đáy cột thủy ngân cách đáy của ống một khoảng l_1 = 5 cm, nếu đầu hở xuống dưới thì khoảng cách ấy là l_2 = 7 cm. Trong khoảng ấy có không khí.

a) Tính ra cm Hg áp suất của khí quyển P_0 ?

b) Nếu đặt ống nằm ngang thì khoảng cách ấy là bao nhiêu ?

(Nhiệt độ khí quyển giả thiết là không đổi).

5.2. Một ống thủy tinh chiều dài L = 50 cm, hai đầu kín, giữa có một đoạn thủy ngân dài l = 10cm, hai bên là không khí có cùng một khối lượng. Khi đặt ống nằm ngang thì đoạn thủy ngân ở đúng giữa ống. Dựng ống đứng thẳng thì thủy ngân tụt xuống 6 cm

a) Tính áp suất không khí khi ống nằm ngang ?

b) Ống nằm ngang, nếu mở một đầu ống thì thủy ngân dịch chuyển bao nhiêu và sang bên nào ?

c) Ống thẳng đứng, hai đầu kín. Nếu mở một đầu thì thủy ngân tụt hay lên cao bao nhiêu trong hai trường hợp : mở đầu dưới; mở đầu trên ?

(Áp suất khí quyển bằng 76 cmHg. Nhiệt độ không đổi).

5.3. Một ống dài $l = 0,9$ m, một đầu kín được cắm thẳng đứng vào chậu Hg cho đầu hở cách mặt thoáng một khoảng $h = 0,75$ m. Tìm khoảng cách x từ đầu kín đến mực thủy ngân trong lòng ống. Áp suất khí quyển là $P_0 = 10^5$ Pa. Trọng lượng riêng của Hg là $d = 13,6.10^4$ N/m^3.

5.4. Một ống tiết diện nhỏ chiều dài $l = 1$m, hai đầu hở, được nhúng thẳng đứng vào chậu đựng Hg cho ngập một nửa. Sau đó người ta lấy tay bịt kín đầu trên và nhấc ống ra. Cột Hg còn lại trong ống dài bao nhiêu ? Biết áp suất khí quyển là $P_0 = 0,76$ mHg.

5.5. Một ống hình chữ U tiết diện 1 cm^2 có một đầu kín. Đổ một lượng thủy ngân vào ống thì đoạn ống chứa không khí bị giảm có độ dài $l_0 = 30$ cm và hai mực thủy ngân ở hai nhánh chênh nhau $h_0 = 11$ cm. Đổ thêm thủy ngân thì đoạn chứa không khí có độ dài $l = 29$ cm. Hỏi đã đổ bao nhiêu cm^3 Hg ? Áp suất khí quyển là $P_0 = 76$ cmHg (Nhiệt độ không đổi).

5.6. Một ống hình chữ U tiết diện không đổi có một đầu kín chứa không khí; đoạn ống chứa không khí dài $h_0 = 30$cm. Không khí bị giam hãm bởi thủy ngân mà hai mặt thoáng chênh nhau $d_0 = 14$ cm. Người ta đổ thêm vào ống một lượng thủy ngân có chiều dài $a = 6$ cm. Tính chiều dài mới h của cột không khí ? Áp suất khí quyển bằng $P_0 = 76$ cmHg. Nhiệt độ không đổi.

5.7. Một bình hình trụ cao $l_0 = 20$ cm chứa không khí ở 37^0C.Người ta lộn ngược bình và nhúng vào chất lỏng có khối lượng riêng $d = 800$ kg/m^3 cho đáy ngang với mặt thoáng chất lỏng. Không khí bị nén chiếm 1/2 bình.

a) Nâng bình cao thêm một khoảng $l_1 = 12$ cm thì mực chất lỏng trong bình chênh lệch bao nhiêu so với mặt thoáng ở ngoài ?

b) Bình ở vị trí câu a) Nhiệt độ của không khí bằng bao nhiêu thì không còn chênh lệch nói trên nữa ?

(Áp suất khí quyển $P_0 = 9,4.10^4$ Pa; lấy $g = 10$ m/s^2).

5.8. Một ống tiết diện nhỏ chiều dài $l = 50$ cm, chứa không khí ở 227^0C và áp suất khí quyển. Người ta lộn ngược ống nhúng vào nước cho miệng ngập sâu h= 10 cm rồi mở nút. Khi nhiệt độ giảm xuống và bằng 27^0 C thì mực nước trong ống cao hơn mặt thoáng bao nhiêu ? Áp suất khí quyển bằng $P_0 = 10$ m H_2O (Bỏ qua dãn nở của ống).

5.9. Một mol khí lý tưởng thực hiện chu trình 1 – 2 – 3 – 4 (hình vẽ).

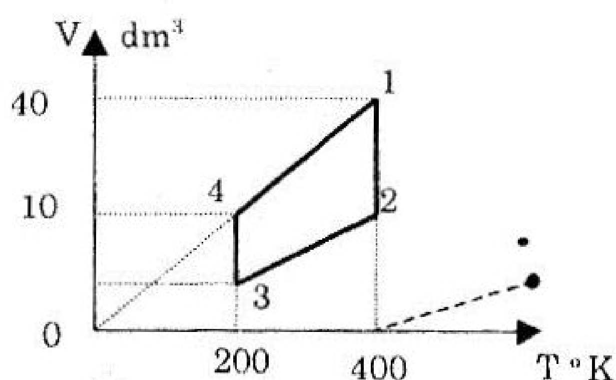
Biết $T_1 = T_2 = 400$ K

$T_3 = T_4 = 200$ K

$V_1 = 40$ dm^3

$V_3 = 10$ dm^3

Tính áp suất P ở các trạng thái và vẽ đồ thị P – V (P_1, P_2, P_3, P_4 ?)



5.10. Một mol khí thực hiện chu trình biểu diễn bằng hình chữ nhật (hình vẽ). Đường thẳng 2 – 4 đi qua gốc O, hai điểm 1 và 3 trên cùng một đường đẳng nhiệt.

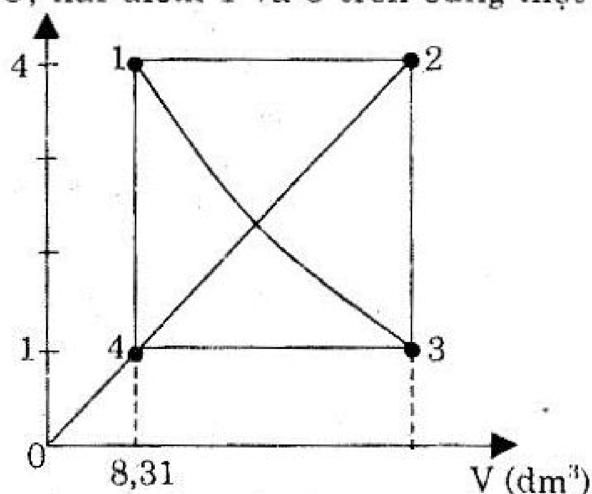
Biết : $V_1 = V_4 = 8{,}31$ dm^3

$P_1 = P_2 = 4.10^5$ Pa

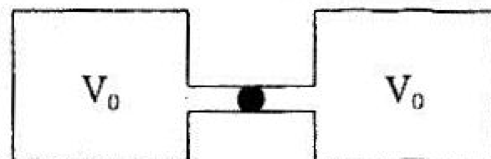
$P_3 = P_4 = 10^5$ Pa

Tính nhiệt độ của các trạng thái và vẽ đồ thị P – T (R = 8,31 J/mol.K)

(T_1, T_2, T_3, T_4 ?)

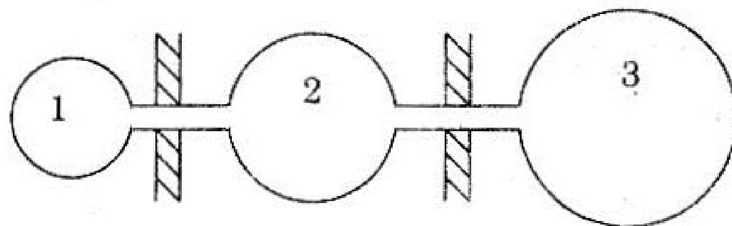


5.11. Hai bình giống nhau được nối với nhau bằng ống nằm ngang có tiết diện 20 mm^2 (hình vẽ). Ở 0^0C giữa ống có một giọt thủy ngân ngăn không khí ở hai bên.



Thể tích mỗi bình là $V_0 = 200$ cm^3. Nếu nhiệt độ một bình là t^0C, bình kia là $-t^0$C thì giọt thủy ngân dịch chuyển 10 cm. Tính t ?

5.12. Có 3 bình thể tích $V_1 = V$, $V_2 = 2V$, $V_3 = 3V$ thông với nhau nhưng cách nhiệt đối với nhau (hình vẽ). Ban đầu các bình chứa khí ở cùng nhiệt độ T_0 và áp suất P_0. Người ta hạ nhiệt độ bình (1) xuống $T_1 = T_0/2$ và nâng nhiệt độ bình (2) lên $T_2 = 1{,}5T_0$, bình (3) lên $T_3 = 2T_0$. Tính áp suất mới P ?

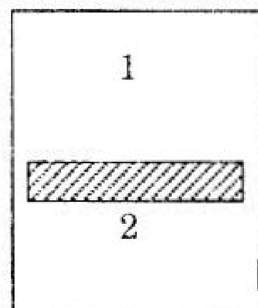


5.13. Một bình chứa khí oxi (O_2) nén ở áp suất $P_1 = 1.5.10^7$ Pa và nhiệt độ $t_1 = 37^0$C có khối lượng (bình và khí) $M_1 = 50$ kg. Dùng khí một thời gian, áp kế trỏ $P_2 = 5.10^6$ Pa ở nhiệt độ $t_2 = 7^0$C. Khối lượng của bình

và khí là M_2 = 49kg. Hỏi còn bao nhiêu kg khí trong bình ? Tính thể tích của bình ? (Cho O = 16, R = 8,31J/mol.K).

5.14 : Một bình kín hình trụ đặt thẳng đứng được chia thành hai phần bằng một pittông nặng cách nhiệt (hình vẽ), ngăn trên chứa 1 mol, ngăn dưới chứa 3 mol của cùng một chất khí.

Nếu nhiệt độ ở hai ngăn đều bằng T_1=400K thì áp suất ở ngăn dưới P_2 gấp đôi áp suất ở ngăn trên P_1. Nhiệt độ ngăn trên không đổi, ngăn dưới có nhiệt độ T_2 nào thì thể tích hai ngăn bằng nhau?



Cho : n_t =1 mol, n_d = 5 mol

$T_t^{(1)} = T_d^{(1)} = T_1$ =400 K

$P_d = P_2 = 2P_t = 2P_1$

$T_t^{(2)} = T_2$ = 400 K, $V_t^{(2)} = V_d^{(2)}$ =V

Tìm : $T_d^{(2)}$ = ?

5.15. Hai bình có thể tích V_1 = 40 dm^3 và V_2 = 10 dm^3 thông với nhau bằng ống có khóa ban đầu đóng. Khóa này chỉ mở nếu $P_1 \geq P_2 + 10^5$ Pa. P_1 là áp suất của khí trong bình 1, P_2 là áp suất trong bình 2. Ban đầu bình 1 chứa khí ở áp suất P_0 = 0,9.10^5 Pa và nhiệt độ T_0 = 300 K.Trong bình 2 là chân không. Người ta nung nóng đều hai bình từ T_0 lên T = 500 K.

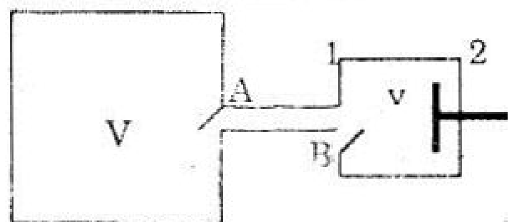
a) Tới nhiệt độ nào thì khóa ban đầu đóng sẽ mở ?

b) Tính áp suất cuối cùng trong mỗi bình ?

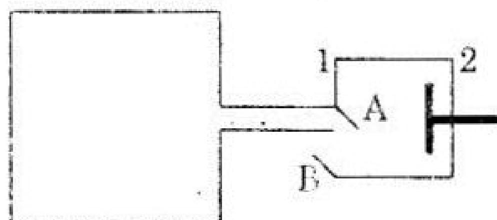
5.16. Một bình trụ cách nhiệt được chia thành hai phần có thể tích V_1 và V_2 nhờ một bản cách nhiệt. Phần đầu chứa khí ở nhiệt độ T_1 và áp suất P_1. Phần thứ hai cũng chứa khí này nhưng ở nhiệt độ T_2 và áp suất P_2. Tìm nhiệt độ trong hình trụ khi bỏ bản cách nhiệt đi ?

5.17. Hình 1a là sơ đồ nén không khí vào bình có thể tích V bằng bơm có thể tích v. Khi pittông đi sang bên phải thì van A đóng không cho không khí thoát ra khỏi bình đồng thời van B mở cho không khí đi vào xilanh. Khi pittông đi sang bên trái thì van B đóng, van A mở, pittông nén không khí vào bình.

a) Ban đầu pittông ở vị trí 1và áp suất trong bình là P_0, áp suất khí quyển P_k. Tính số lần phải ấn pittông để áp suất trong bình có giá trị cuối P_c. Người ta ấn chậm để nhiệt độ trong bình không đổi.



(1a)

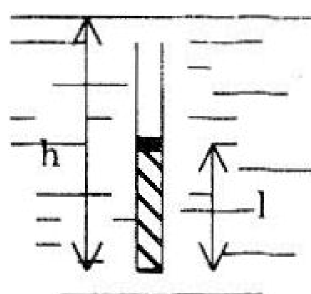


(1b)

b) Bố trí lại các van như trong hình 1b thì có thể rút không khí trong bình. Ban đầu pittông ở vị trí 1, áp suất trong bình là P_0. Tính số lần cần kéo pittông để áp suất trong bình giảm đi r lần, $P_c = P_0/r$. Áp dụng bằng số : r = 100, V=10v. Tính số lần cần kéo pittông.

5.18. Một pittông nặng có thể chuyển động không ma sát trong một xilanh kín đứng thẳng. Phía trên pittông có một mol khí, phía dưới cũng có 1 mol khí của cùng một chất khí lí tưởng. Ở nhiệt độ tuyệt đối T chung cho cả xilanh, tỷ số các thể tích khí là $\frac{V_1}{V_2} = n > 1$. Tính tỉ số $x = \frac{V_1'}{V_2'}$ khi nhiệt độ có giá trị T' cao hơn. Dãn nở của xilanh không đáng kể. Áp dụng bằng số n = 2, T' = 2T; tính x ?

5.19. Một ống nghiệm chứa khí hiđrô có nút đậy là một pittông khối lượng không đáng kể,dịch chuyển không ma sát trong ống. Lúc đầu ống ở ngoài không khí có áp suất P_0. Chiều dài phần ống chứa H là L. Người ta đặt ống vào một chậu thủy ngân có khối lượng riêng d, ống đứng thẳng, đáy ống cách mặt thoáng Hg một khoảng h > L (hình vẽ).



a) Tính chiều dài mới l của phần ống chứa H ? (Nhiệt độ H giữ không đổi).

b) Cân bằng của nút khi ống ở trong Hg có bền hay không ?

5.20. Một khí cầu có thể tích V = 336 m^3 và khối lượng vỏ m = 84 kg được bơm không khí nóng đến áp suất bằng áp suất không khí bên ngoài. Không khí nóng phải có nhiệt độ bằng bao nhiêu để khí cầu bắt đầu bay lên. Không khí bên ngoài có nhiệt độ 27°C và áp suất 1 atm; $\mu_{(kk)}$ = 29 g/mol.

5.21. Hai bong bóng xà phòng bán kính R_1 và R_2 hợp thành một bong bóng bán kính R_3. Tìm áp suất khí quyển nếu hệ số sức căng bề mặt của xà phòng bằng σ.

5.22. Một quả bóng trẻ con khối lượng m = 5 g được bơm khí hiđrô thành hình cầu ở điều kiện t_0 = 27°C, $P_0 = 10^5$ P_0. Bán kính bóng bằng bao nhiêu thì :

a) Bóng lơ lửng ?

b) Bóng có thể bay tới độ cao có áp suất p = 0,5 P_0 và nhiệt độ t = 7°C ? (Nếu bóng có thể dãn nở bán kính gấp rưỡi không vỡ).

Biết các khối lượng mol của hiđrô μ_H = 2 g/mol, của không khí là μ_K =29g/mol, R = 8,31 J/mol.K.

5.23. Trong bình có hỗn hợp m_1 gam nitơ N_2 và m_2 gam hidrô H_2. Ở nhiệt độ T thì ni tơ phân li hoàn toàn thành khí đơn nguyên tử, độ phân li của H_2 không đáng kể. Áp suất trong bình là p. Ở nhiệt độ 2T thì H_2 cũng phân li hoàn toàn, áp suất là 3p. Tính tỉ số m_1/m_2 ? Cho N = 14, H = 1.

5.24. Một xilanh đóng kín bằng pittông và đặt trong buồng điều nhiệt có nhiệt độ 27^0C chứa hỗn hợp hai chất khí không tương tác hoá học với nhau. Lượng chất 1 là n_1 = 0,5 mol, lượng chất 2 là n_2 = 0,4 mol. Người ta nén từ thể tích ban đầu $V_0 = 200\ dm^3$ xuống thể tích cuối $V_c = 30\ dm^3$.

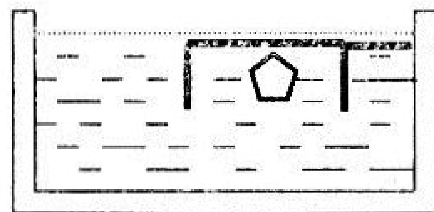
a) Tính áp suất ban đầu của hỗn hợp.

b) Trạng thái hai chất biến đổi thế nào trong quá trình nén ? Tính thể tích và áp suất của từng chất và của cả hỗn hợp ứng với các điểm đặc biệt của đồ thị P_V và vẽ đồ thị này (gồm 3 đường cong).

c) Tính khối lượng các chất lỏng có trong xilanh ở cuối quá trình.

Chất 1 có khối lượng mol μ_1 = 0,02 kg/mol và áp suất hơi bão hoà ở 27^0C bằng $P_{b1} = 0,83.10^4$ Pa. Chất 2 có μ_2 = 0,04 kg/mol và $P_{b2} = 1,66.10^4$ Pa. Giả thiết hơi bão hoà cũng tuân theo phương trình của các khí lí tưởng. Lấy R = 8,31 J/mol.K.

5.25. Giải thích hiện tượng :



Một bình nhỏ có đường kính nhỏ được dìm vào bình lớn chứa nước. Bình nhỏ chứa một phần nước có đáy nằm trên được giữ cố định với bình lớn (hình vẽ). Trên bề mặt nước trong bình nhỏ có một tảng băng. Điều gì xảy ra với hai mực nước trong hai bình khi băng tan (bỏ qua sự thay đổi nhiệt độ khi băng tan).

5.26. Trong một bình với thể tích V_0 = 1,1 lít có khí hiđrô H_2 và m = 100 g chất hấp thụ ở nhiệt độ t = -93^0C và áp suất p = 2.10^4 Pa. Ở nhiệt độ này khối lượng khí hiđrô bị hấp thụ là 2g. Nếu nung nóng tới nhiệt độ $t_1 = 37^0C$ thì toàn bộ hiđrô bị hấp thụ được giải phóng. Tính áp suất P_1 tương ứng. Khối lượng riêng của chất hấp thụ là c = 1 g/cm^3. H = 1.

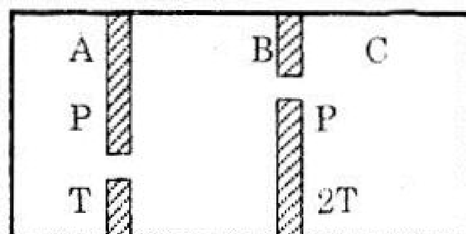
5.27. Một bóng thám không chứa đầy hiđrô. Vỏ bóng có thể tích không đổi V = 75 m^3 và khối lượng m = 7 kg, phía dưới bóng có lỗ nhỏ. Thả cho bóng bay lên, hỏi nó tới được độ cao tối đa nào, biết rằng áp suất khí quyển giảm 1/2 mỗi lần độ cao tăng 5 km, và nhiệt độ ở tầng trên của khí quyển (độ cao mà bóng tới) là T = 218 K. Áp suất khí quyển ở mặt đất là $P_0 = 10^5$ Pa, μ_{kk} = 29 g/mol; μ_H=2g/mol; R = 8,31 J/mol.K.

5.28. Tính (gần đúng) khối lượng nước bay hơi trong 1 giây từ 1 m^2 của mặt hồ ở nhiệt độ T = 300K. Sự bay hơi tạo thành một lớp hơi bão hoà ở áp suất p = 3,5 KPa. Giả thiết các phân tử hơi nước có vận tốc trung bình $\overline{v} = \sqrt{3RT/\mu}$, $\mu_{(nước)}$= 0,018 kg/mol. (Khối lượng nước trở lại mặt hồ có

bằng lượng nước bay hơi không ? Giải thích hiện tượng hồ mất nước dần do bay hơi).

5.29. Một bình cách nhiệt có một lỗ nhỏ thông với bên ngoài. Bên ngoài là chất khí ở nhiệt độ T và áp suất p đủ thấp để các phân tử khí khi bay qua lỗ không va chạm vào nhau. Người ta giữ nhiệt độ khí trong bình bằng 4T. Tính áp suất p_1 trong bình khi đã có trạng thái dừng (không đổi với thời gian) trong bình (biết rằng vận tốc trung bình $\overline{v} = \sqrt{3RT/\mu}$.

5. 30*. Một buồng B cách nhiệt thông bằng hai lỗ nhỏ giống nhau với hai buồng A, C chứa một chất khí lí tưởng. Người ta giữ cho áp suất ở hai buồng ấy không đổi và bằng p, giữ nhiệt độ ở buồng A bằng T, nhiệt độ ở buồng C bằng 2T. Tính áp suất p_1 và nhiệt độ T_1 ở buồng B khi đã có trạng thái dừng (không đổi) trong buồng ấy (giả thiết vận tốc trung bình của khí bằng $\overline{v} = \sqrt{3RT/\mu}$).



5.31. Hai băng đồng và sắt có cùng bề dày 2 mm và chiều dài l_0 ở 0°C được hàn ở hai đầu thành băng kép có khe hở 1 mm ở giữa. Tính bán kính trung bình của băng ngoài khi băng kép được hơ nóng lên nhiệt độ t = 200°C. Giả thiết khi hơ nóng băng kép có dạng cung tròn. Các hệ số dãn nở dài của đồng là $\alpha = 1,7.\ 10^{-5}K^{-1}$, của sắt là $\beta = 1,2.\ 10^{-5}K^{-1}$.

5.32. Ở 0°C một vật rắn nổi trong một chất lỏng với 98% thể tích bị ngập. Hỏi bao nhiêu % thể tích chất rắn bị ngập khi nhiệt độ là t = 25°C ? Các hệ số nở khối của chất rắn là $\alpha = 3,6.10^{-5}K^{-1}$, của chất lỏng là $\beta = 8,2.\ 10^{-4}K^{-1}$.

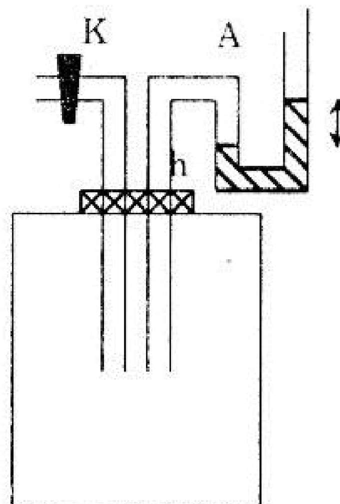
5.33. Một bình thủy tinh hình lập phương chứa đầy chất lỏng ở t = 20°C, khối lượng chất lỏng là m = 79 kg. Nhiệt độ tăng lên t_1 = 80°C thì có 3 kg chất lỏng tràn ra. Biết thủy tinh có hệ số nở dài là $\alpha = 1,2.\ 10^{-5}K^{-1}$; tính hệ số nở khối β của chất lỏng.

5.34. Một mol khí nhận nhiệt lượng Q và dãn nở theo quy luật V = bp, b là một hệ số không đổi. Áp suất tăng từ P_1 đến P_2. Biết nhiệt dung mol đẳng tích C_v. Tính b (theo Q, C_v,P_1, P_2).

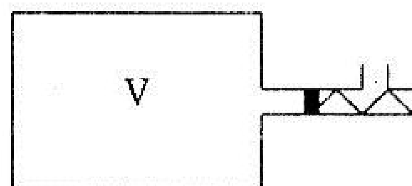
5.35. Hai bình cách nhiệt nối với nhau bằng một ống nhỏ có khoá. Bình thứ nhất có thể tích V_1 = 500 l, chứa m_1 = 16,8 kg Nitơ ở áp suất $P_1 = 3.10^6$ Pa. Bình thứ hai có thể tích V_2 =250 l, chứa m_2 = 1,2 kg Argon ở áp suất $P_2 = 5.10^5$ Pa. Hỏi sau khi mở khoá cho hai bình thông nhau, nhiệt độ và áp suất của khí là bao nhiêu? Cho biết nhiệt dung mol đẳng tích của N_2 là $C_1 = \frac{5}{2}R$, của Argon là $C_2 = \frac{3}{2}R$, Khối lượng mol của N_2 là μ_1 = 28 g/mol, của Ar là μ_2=40 g/mol; R= 8,31 J/mol.K.

5.36. Một quả bóng đá khối lượng 800 g, đường kính 22 cm được bơm căng đến áp suất 2 atm. Tính nhiệt độ của khí trong bóng lúc tiếp đất sau khi bóng rơi thẳng đứng từ độ cao 25 m. Cho rằng vỏ bóng hoàn toàn mềm và cách nhiệt. Nhiệt độ ban đầu của quả bóng là 27°C. Bỏ qua sức cản của không khí. Nhiệt dung mol đẳng tích của không khí : $C_v = 2,5$ R (R = 8,31 J/mol.K); g = 10 m/s^2; 1atm = 10^5 Pa.

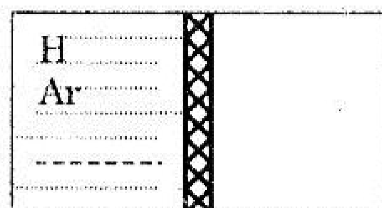
5.37*. Một bình đủ lớn chứa không khí thông với một áp kế chất lỏng A dạng chữ U thể tích không đáng kể, và thông với môi trường ngoài qua một khoá K. Thoạt tiên khoá K đóng, áp suất trong bình cao hơn áp suất khí quyển chút ít và chênh lệch các mức chất lỏng trong áp kế là h. Ta mở khoá K rồi đóng lại ngay và một lát sau thấy chênh lệch các mức chất lỏng đạt giá trị ổn định là h'. Hãy xác định tỉ số $\gamma = \frac{c_P}{c_V}$ (theo h và h') của không khí.



5.38*. Một bình có thể tích V chứa 1 mol khí lí tưởng và một cái van bảo hiểm là một xilanh rất nhỏ so với bình, trong có một pittông diện tích S, giữ bằng lò xo có độ cứng k (hìmh vẽ). Khi nhiệt độ là T_1 thì pittong ở cách lỗ thoát khí một đoạn l. Nhiệt độ của khí tăng đến giá trị T_2 nào thì khí thoát ra ngoài ?



5.39. Một bình kín được chia làm hai phần có thể tích bằng nhau bằng vách xốp. Ban đầu ở phần bên trái có hỗn hợp hai chất khí Argon (Ar) và Hiđrô (H) ở áp suất toàn phần P; ở bên phải là chân không. Chỉ có H khuếch tán được qua vách xốp (hình vẽ). Sau khi khuếch tán kết thúc áp suất trong phần bên trái là $p' = \frac{2}{3}p$. Tính tỉ lệ các khối lượng m_A/m_H (m_A, m_H tương ứng là khối lượng của Argon và Hiđrô trong bình). Biết khối lượng mol của Argon $\mu_A = 40$ g/mol, của Hiđrô là $\mu_H = 2$ g/mol. Coi quá trình là đẳng nhiệt.



5.40. Sét hòn là một quả cầu sáng lơ lửng trong không khí. Theo một lý thuyết giải thích hiện tượng này thì quả cầu là chất khí mà mỗi phân tử gồm một nguyên tử Nitơ liên kết với n phân tử nước (n là số nguyên dương) có nhiệt độ khoảng 600°C.Tính n (giả thiết rằng áp suất trong quả cầu bằng áp suất khí quyển), biết nhiệt độ không khí là $t_0 = 20$°C, khối lượng mol của không khí là $\mu_0 = 29$ g/mol; H = 1; N = 14; O = 16.

5.41. Hai giọt thủy ngân có bán kính $r = 0,5$ mm tiếp xúc với nhau và thành một giọt (vẫn có hình cầu bán kính R). Nhiệt độ thủy ngân tăng lên. Tại sao? Giả thiết nhiệt không truyền cho môi trường ngoài, tính độ tăng nhiệt độ, biết hệ số căng mặt ngoài của thủy ngân là c = 0,47N/m, nhiệt dung riêng là a = 138J/kg, khối lượng riêng là $m = 13,6.10^3 kg/m^3$.

5.42. Một ống mao dẫn dài 20cm, bán kính trong R = 0,5mm, một đầu hàn kín, một đầu hở. Người ta đặt ống thẳng đứng sao cho đầu hở chạm vào mặt nước. Hãy xác định chiều cao của cột nước trong ống, cho biết nước làm ướt hoàn toàn ống thủy tinh. Hệ số căng mặt ngoài của nước là $c = 72,5.10^{-3}$ N/m. Áp suất khí quyển là $p = 10^5$pa. Khối lượng riêng của nước là $d = 10^3$ kg/m^3.

5.43. Ở nhiệt độ $t_1 = 22^0C$ độ ẩm tương đối của không khí là 60%. Nhiệt độ hạ xuống $t_2 = 10^0C$, tính khối lượng nước ngưng tụ trong một m^3 không khí. Áp suất hơi nước bão hòa ở 22^0C là $P_1 = 2,6.10^3$pa, ở 10^0C là $P_2 = 1,2.10^3$ Pa ($\mu_{H2O} = 0,018$ kg/mol)

5.44. 200kg chì lỏng ở nhiệt độ nóng chảy 327^0C được đổ vào một hỗn hợp gồm 20kg nước (ở 0^0C) và 1 kg nước đá (đá ở 0^0C). Tìm nhiệt độ và thành phần cuối của hệ, bỏ qua các mất mát vì nhiệt toả ra ngoài. Cho biết:

– Nhiệt nóng chảy của chì: 21 KJ/kg

– Nhiệt dung riêng của chì: 0,125 KJ/kg.K

– Nhiệt dung riêng của nước: 4,19 KJ/kg.K

– Nhiệt hoá hơi của nước: 2260 KJ/kg.

– Nhiệt nóng chảy của nước đá: 330 KJ/kg.

5.45. 0,2kg hơi nước ở nhiệt độ 150^0C và áp suất chuẩn được bơm vào một bình chứa 2kg nước và 0.5kg nước đá (đá ở 0^0C). Tìm nhiệt độ cuối cùng x trong bình biết:

– Nhiệt dung của bình là 0,63KJ/K

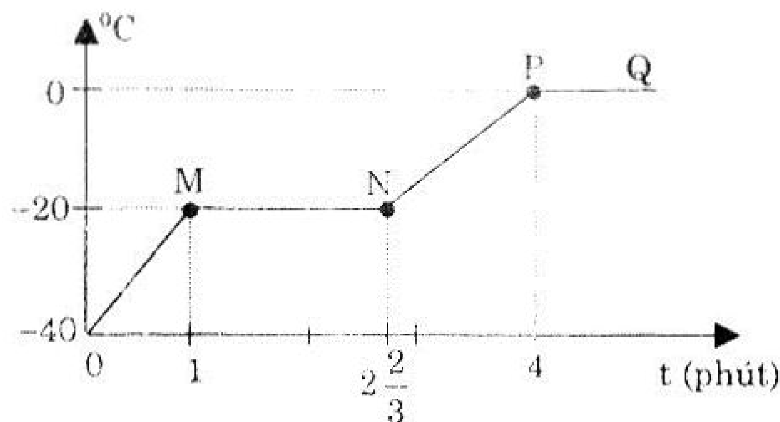
– Nhiệt dung riêng của nước là 4,19KJ/kg.K,

– Nhiệt dung riêng của hơi nước là 1,97KJ/kg.K

– Nhiệt nóng chảy của nước đá là 330 KJ/kg

– Nhiệt hoá hơi của nước là 2260KJ/kg.

5.46. Trong một bình cách nhiệt có 1kg nước đá, 1kg một chất A dễ nóng chảy, không tan được trong nước, và một bếp điện công suất không đổi, nhiệt dung không đáng kể. Nhiệt độ ban đầu trong bình là $- 0^0C$. Sau khi cho bếp hoạt động, nhiệt độ trong bình biến đổi theo thời gian như đồ thị:



Cho biết nhiệt dung riêng của nước đá là $C_đ = 2.10^3$ J/kg.K của chất rắn A là $C = 10^3$ J/kg.K

Hãy: a) Tính nhiệt nóng chảy của chất rắn A;

b) Tính nhiệt dung riêng của chất A sau khi đã chảy lỏng.

5.47. Một máy hơi nước có công suất 150kw. Xi lanh có thể tích $0{,}2m^3$. Hơi nước ở nhiệt độ 165^0C được nạp trong 4/10 khoảng chạy của pittông, dãn nở rồi ngưng tụ trong buồng ngưng có nhiệt độ 45^0C. Nước từ buồng ngưng chuyển sang lò hơi để nấu thành hơi. Cứ mỗi vòng quay của bánh đà, hơi nước nạp lần lượt vào 2 mặt của pittông. Tính:

a) Khối lượng nước tiêu thụ (biến đổi thành hơi) mỗi giờ.

b) Hiệu suất thực? Hiệu suất lý tưởng?

Biết bình đã quay mỗi phút 70 vòng

- Khối lượng riêng của hơi nước ở 165^0C là $3{,}66kg/m^3$
- Nhiệt dung riêng của nước là 4,19KJ/kg.K
- Nhiệt hoá hơi của nước ở 165^0C là $2{,}05.10^3$ KJ/kg.

5.48*. Một mol chất khí lý tưởng có chu trình biến đổi sau đây. Từ trạng thái 1 với $P_1 = 10^5$pa, $T_1 = 600^0K$ dãn nở đẳng nhiệt đều trạng thái 2 có $P_2 = 2{,}5.10^4$pa rồi bị nén đẳng áp đến trạng thái 3 có $T_3 = 300^0K$ và bị nén đẳng nhiệt đến trạng thái 4, cuối cùng trở lại trạng thái 1 bằng quá trình đẳng tích.

a) Tính V_1, V_2, V_3, V_4, và vẽ đồ thị P – V

b) Trong mỗi quá trình và cả chu trình chất khí nhận hay sinh bao nhiêu công, nhận hay toả bao nhiêu nhiệt?

Cho nhiệt dung mol đẳng tích $C_V = 2{,}5.K$, $R = 8{,}3$ J/mol K. Công mà một mol khí sinh ra trong dãn nở đẳng nhiệt từ thể tích V đến thể tích V' là $A = RT\ln\frac{V'}{V}$.

5.49. Một khối khí Nitơ chứa trong bình có thể tích 10l, áp suất ở bình là 10^{-11} mm Hg, nhiệt độ là 10^0C.

a) Tính động năng tịnh tiến trung bình và mật độ của các phân tử khí.

b) Nếu mật độ phân tử khí TB tăng gấp 2 lần, nhưng áp suất vẫn giữ nguyên thì nhiệt độ và thể tích của khối khí bằng bao nhiêu?

5.50. Một đám mây dày 5km là khối khí có độ ẩm 80% và nhiệt độ $t_1 = 20^0$C. Nhiệt độ tụt xuống $t_2 = 5^0$C. Tính bề dày lớp nước mưa trên mặt đất. Áp suất hơi nước bão hoà ở t_1 là $P_1 = 2300$ pa, ở t_2 là $P_2 = 870$pa.

5.51. Máy điều hoà mỗi giây hút $3m^3$ không khí từ khí quyển có nhiệt độ $t_1 = 40^0$C và độ ẩm 80%. Máy làm không khí lạnh xuống $t_2 = 5^0$C và đưa vào buồng. Sau một thời gian máy hoạt động nhiệt độ trong buồng là $t_3 = 25^0$C. Tính lượng nước ngưng tụ mỗi giây ở máy và độ ẩm trong phòng. Áp suất hơi bão hoà ở nhiệt độ t_1, t_2, t_3, tương ứng là $P_1 = 7400$ pa, $P_2 = 870$pa, $P_3 = 3190$pa.

5.52. Một đồng hồ quả lắc chạy đúng ở thành phố Hồ Chí Minh được đưa ra Hà Nội, quả lắc coi như một con lắc đơn, có hệ số nở dài $\alpha = 2.10^{-5}$ độ$^{-1}$. Gia tốc trọng trường tại thành phố Hồ Chí Minh là $g_1 = 9,787m/s^2$.

Từ thành phố Hồ Chí Minh ra Hà Nội nhiệt độ giảm $10,0^0$C. Đồng hồ chạy nhanh mỗi ngày đêm 34,5s. Suy ra gia tốc trọng trường tại Hà Nội.

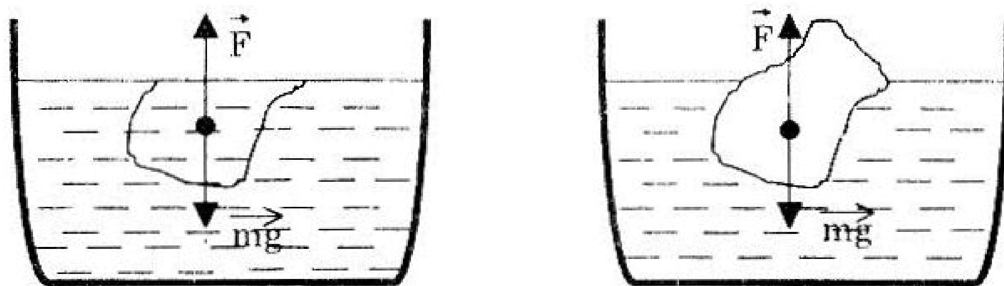
5.53 (KB6 – 76). Trên giản đồ PV trình bày một quá trình kín cho một mol khí. Hai đường $1 \rightarrow 2$ và $3 \rightarrow 4$ là đường thẳng đi qua gốc toạ độ, đường $1 \rightarrow 2$ dốc hơn đường $3 \rightarrow 4$, hai đường $2 \rightarrow 3$ và $4 \rightarrow 1$ là hai đường đẳng nhiệt. Vẽ đồ thị của quá trình này trên giản đồ TV. Tìm thể tích V_3 nếu biết thể tích V_1, và $V_2 = V_1 = V$.

5.54 (KB2 – 75). Một hình trụ cách nhiệt được chia thành hai phần có thể tích V_1 và V_2 nhờ một bản cách nhiệt. Phần đầu chứa khí ở nhiệt độ T_1 và áp suất P_1. Phần thứ hai cũng chứa khí này nhưng ở nhiệt độ T_2 và áp suất P_2. Tìm nhiệt độ trong hình trụ khi bỏ bản cách nhiệt đó.

5.55 (KB10 – 77). Tính gần đúng bán kính cực tiểu của hành tinh để nó có thể giữ được khí quyển chủ yếu bao gồm oxy và nitơ nếu nhiệt độ bề mặt của hành tinh T = 300K. Cho biết mật độ vật chất trung bình của hành tinh bằng $\varsigma = 4\,10^3 kg/m^3$.

5.56 (KB6 – 80). Cho một bình chân không cách nhiệt bao quanh nó là khí lý tưởng đơn nguyên tử có nhiệt độ T_0. Tại một thời điểm nào đó ta mở van và khí chiếm đầy bình. Tìm nhiệt độ của khí trong bình ngay sau khi khí chiếm đầy bình.

5.57 (KB5–80). Vật nổi trong nước sao cho 2/3 thể tích của nó chìm trong nước. Tìm phần thể tích của vật nằm dưới nước nếu cho bình chuyển động với gia tốc a hướng theo phương thẳng đứng



5.58 (KB10 – 75). Trong bình đã hút khí có dung tích V = 1l hydrid Uran UH_3, khi đốt nóng đến nhiệt độ $t_1 = 400^0C$. hydrit Uran phân huỷ hoàn toàn thành U và hydro. Tìm áp suất của hydro trong bình ở nhiệt độ đó.

5.59 (KB2 – 77). Biết rằng tần số bức xạ của nguyên tử bay với vận tốc v theo hướng người quan sát thay đổi một lượng $\Delta f = \frac{v}{c} f_0$, c – vận tốc ánh sáng, f_0 – tần số bức xạ của nguyên tử đứng yên. (Hiện tượng này gọi là hiệu ứng Dopler). Vì thế, do chuyển động nhiệt của nguyên tử mà các đường phổ của nguyên tử rộng ra. Xác định nhiệt độ của nguyên tử Ne nếu biết rằng trong phổ bức xạ của nó phát hiện được một vạch đỏ có tần số $f_0 = 4{,}8.10^{14}$Hz, độ rộng của nó $\Delta f = 1{,}6.10^9$Hz.

5.60 (KB6 – 77). Thiết bị nhiệt kế y học thủy ngân được cấu tạo có mao quản mỏng có phần dưới bị thắt lại – phần có đường kính khoảng $r_0 = 30\mu m$ được hàn vào một bầu thủy ngân. Phần thắt lại này đóng vai trò như thế nào? Hãy đánh giá, có thể truyền cho nhiệt kế một gia tốc bao nhiêu để có thể "giật" nó sau thay đổi nhiệt độ? Biết $\sigma = 0{,}5$ N/m. Đường kính ống mao dẫn $R = 6.10^{-5}$ m. Độ dài cột 4 (cm), $\varsigma = 13{,}6.10^3$ kg/m^3.

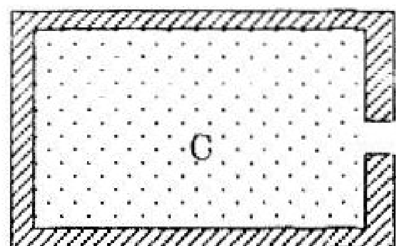
5.61. Vì sao phép đo nhiệt độ bằng nhiệt kế y học kéo dài lâu (khoảng 10 phút) mà có thể "giật" nhiệt kế ngay sau khi đo nhiệt độ?

5.62 (KB3 – 75). Tủ lạnh có rơle nhiệt làm việc trong phòng không có lò sưởi. Khi tại thời điểm mắc tủ lạnh với mạng điện, nhiệt độ trên đường phố, trong phòng và trong tủ lạnh bằng nhau, giả thiết nhiệt độ trên đường không thay đổi. Hãy trình bày gần đúng trên các đồ thị nhiệt độ trong phòng thay đổi thế nào khi mắc tủ lạnh vào mạng điện cho 3 trường hợp: 1) tủ lạnh rỗng; 2) chứa đầy trái cây; 3) hai cánh cửa của tủ lạnh mở ra. Vẽ trên cùng một đồ thị.

5.63 (KB3 – 75). Kênh đào đi qua cầu trên đường nhựa. Áp suất lên cầu thay

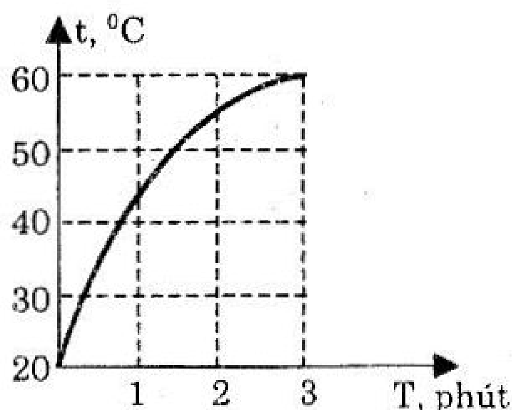
đổi thế nào nếu lần đầu xà lan rỗng và lần sau xà lan chứa đầy hàng chuyển động qua kênh?

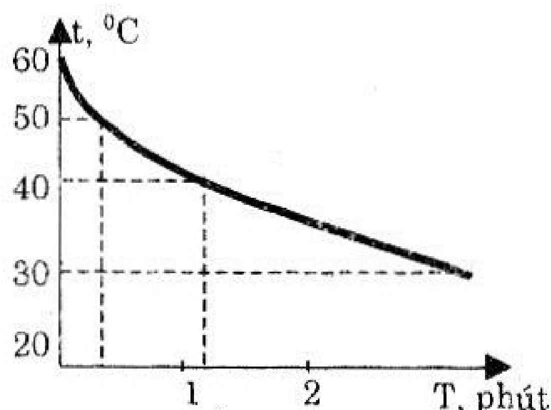
5.64 (KB1 – 75). Bình C thông với không gian ngoài qua lỗ nhỏ. Nhiệt độ khí trong không gian bao quanh T, áp suất P, khí loãng đến mức độ mà các phân tử khí khi bay vào bình và ra khỏi bình không va chạm với nhau ở vùng kích thước lỗ. Trong bình giữ nhiệt cố định 4T. Áp suất trung bình như thế nào?



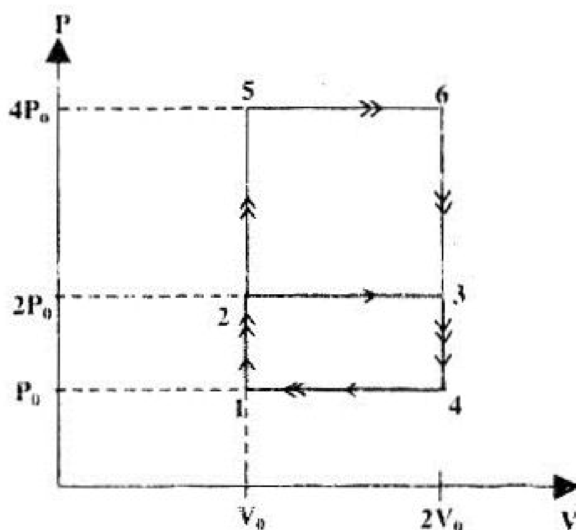
5.65 (KB4 – 74). Hai chất lỏng riêng biệt được rót vào cốc CCl_4 và H_2O. Dưới áp suất khí quyển CCl_4 sôi ở nhiệt độ 76,7^{0}C còn nước ở 100^{0}C. Khi đun nóng đều cốc, sự sôi ở biên hai chất lỏng bắt đầu ở nhiệt độ 65,5^{0}C. Xác định chất lỏng nào sôi cạn nhanh hơn khi đun sôi biên như vậy và nhanh hơn bao nhiêu lần. Áp suất hơi nước bão hòa ở 65,5^{0}C bằng 192 mmHg.

5.66 (KR9 –90). Cái đun nước được thả vào cốc đựng nước và nước được đun nóng dần. Đồ thị phụ thuộc nhiệt độ của nước vào thời gian được vẽ trên hình. Sau 3 phút ta ngắt mạch điện. Sau bao lâu nước giảm xuống nhiệt độ 50^0, 30^0.

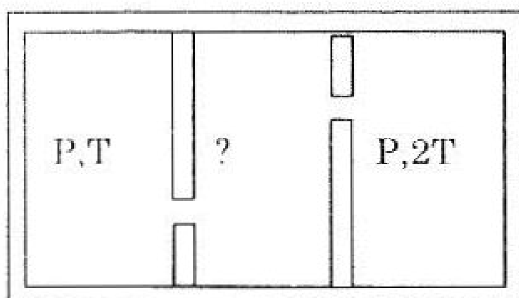




5.67 (KB9 – 79). Trên hình vẽ hai chu trình kín nhiệt động học diễn ra với khí lý tưởng đơn nguyên tử: $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$ và $1 \to 5 \to 6 \to 4 \to 1$. Chu trình nào có hệ số hiệu suất có ích lớn hơn? Và lớn hơn bao nhiêu lần.



5.68 (KB5–78). Một khoang cách nhiệt có hai lỗ nhỏ giống nhau được nối với hai thể tích chứa khí hêli. Áp suất khí hêli trong hai thể tích này được giữ không đổi và bằng P, còn nhiệt độ được giữ ở T và 2T cho hai thể tích tương ứng. Tìm áp suất và nhiệt độ tạo thành trong khoang.



5.69 (KB8 – 78). Giọt nước rơi đều trong không khí. Bán kính độ cong R_1 của bề mặt giọt nước tại điểm trên mặt khác với bán kính độ cong R_2 tại điểm dưới của mặt như thế nào? Nếu khoảng cách giữa hai điểm này bằng $d = 2.10^{-3}$ m? Hệ số sức căng bề mặt của nước bằng $\delta = 7.10^{-3}$ N/m.

5.70 (KB8 – 81). Cốc thành mỏng lật ngược có đáy bằng phần độ dày d nổi trên biên của hai chất lỏng mật độ ς_1, ς_2. Phần trên của cốc có độ cao H. Tiết diện của cốc S. Cốc được nâng lên một khoảng bằng bao nhiêu nếu tại đáy cốc xuất hiện một lỗ thủng?

5.71 (KB). Có một lít nước nóng ở nhiệt độ T_1 và một lít nước lạnh ở nhiệt độ T_2. Nước lạnh nóng lên nhờ nước nóng. Có thể làm cho nước nóng ban đầu có nhiệt độ thấp hơn nước lạnh ban đầu không?

5.72 (KB10 – 79). Vận tốc dòng khí từ bình qua lỗ nhỏ thay đổi thế nào nếu tăng nhiệt độ khí lên bốn lần, áp suất lên 8 lần?

5.73 (KB). Hai bong bóng không khí bán kính $r_1 = r_2 = 3$mm trong thùng chứa nước hợp thành một. Tìm bán kính của bong bóng nhận được ngay sau khi tạo thành nó và sau một khoảng thời gian lớn nếu độ dẫn nhiệt của nước không lớn, còn nhiệt dung của nó rất lớn. Giả thiết rằng hai bong bóng nằm gần mặt nước.

5.74 (KB4 – 80). Xác định lượng nước có thể qua rây lỗ nhỏ hình vuông đường kính 2 × 2mm. Đường kính rây D = 20cm. Các sợi rây không thấm nước.

5.75 (KB6 – 75). Hãy tìm độ cao cột chất lỏng dâng lên trong hai ống mao dẫn rộng dần và hẹp dần. Góc ở đỉnh hình nón do ống mao quản tạo thành bằng 2α rất bé. Hệ số sức căng bề mặt của chất lỏng δ. Cho biết sự dính ướt xảy ra toàn phần.

5.76 (KB11 – 73): Xác định bề mặt của máy bay bị nung nóng đến nhiệt độ cực đại bao nhiêu do ma sát khi chuyển động trong không khí với vận tốc gần bằng vận tốc ánh sáng. Biết rằng không khí bao gồm các phân tử hai nguyên tử nitơ có năng lượng 5/2.KT, k – hằng số Boltzmam, T – nhiệt độ tuyệt đối, nhiệt độ không khí bao quanh là 10^0C.

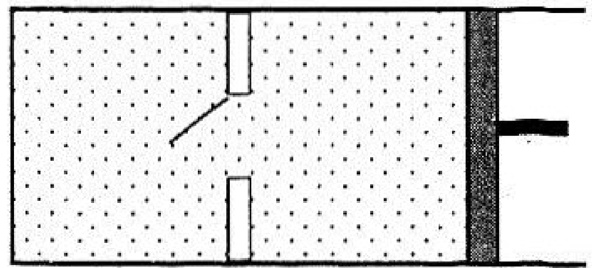
5.77 (KB). Tảng băng nổi trên mặt dầu chứa trong bình hình trụ. Nhiệt độ của hệ bằng 0^0C. Mức nước và áp suất lên đáy bình thay đổi thế nào khi băng tan và nước tạo thành nằm ở đáy bình. Áp suất ở đáy bình không đổi bằng $\frac{F}{S}$, S – diện tích đáy.

5.78 (KB4 – 80). Nhiệt độ trên đường phố $t_0 = -20^0C$, một lò sưởi đang hoạt động giữ cho nhiệt độ trong phòng $t_1 = 16^0C$. Ngoài lò sưởi người ta còn dùng một lò điện công suất $P_1 = 1kw$. Khi đó nhiệt độ trong phòng là $t_2 = 22^0C$. Xác định công suất nhiệt của lò sưởi.

Ghi chú: Sự truyền nhiệt từ vật này vào vật khác tỷ lệ với hiệu nhiệt độ của các chất đó ($\Delta P = k\Delta t, k = \text{constant}$)

5.79 (KB10 – 73). Do sự phóng điện của tụ điện qua hêli loãng, xẩy ra sự đốt cháy khí đến nhiệt độ T. Xác định T nếu hiệu điện thế trên tụ U = 30Kv, điện dung tụ điện C = 18μF, khí chiếm thể tích 10l dưới áp suất 10^{-2} mmHg.

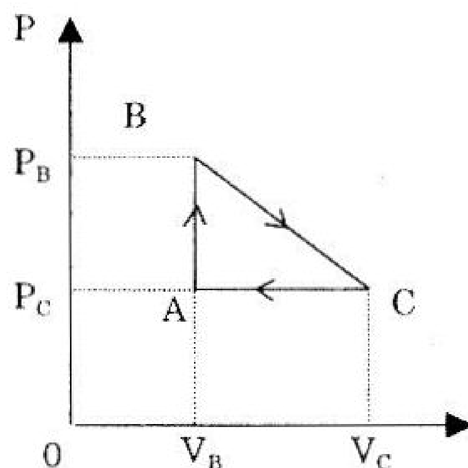
5.80 (KB8 – 77). Xi lanh hình trụ, pittông và vách ngăn trong có diện tích $1dm^2$ được chế tạo từ vật liệu cách nhiệt. Van tại vách ngăn được mở trong trường hợp nếu áp suất phải lớn hơn áp suất trái. Trong trạng thái đầu ở phần trái của hình trụ dài l = 11,2 dm có m_1 = 12g hêli trong phần phải cùng độ dài có m_2 = 2g Heli. Từ hai phía nhiệt độ bằng $T_0 = 0^0C$ ($T_0 = 273^0K$). Áp suất ngoài $P_0 = 10^5$ N/m². Nhiệt dung riêng của hêli khi thể tích không đổi $C_V = 3{,}15.10^3$ J/kg độ, còn ở áp suất không đổi $C_P = 5{,}25.10^3$ J/kg.độ. Pittông được dịch đi dịch lại chậm theo hướng tới vách ngăn (có sự nghỉ nhỏ khi van được mở ra) và được dịch sát tới vách ngăn. Công thực hiện lúc này bằng bao nhiêu? Diện tích pittông $S = 10^{-2}$ m².



5.81 (KB5 – 75). Một nút chai đậy kín hai lỗ thủng trong bình phẳng chứa đầy chất lỏng ở áp suất P. Bán kính của hai lỗ thủng là R và r. Xác định hợp lực tác dụng lên nút chai từ phía chất lỏng. Bỏ qua trường trọng lực.

5.82 (KB9 – 75). Trong không khí ở điều kiện chuẩn, các phân tử va chạm với nhau, quãng đường trung bình giữa hai lần va chạm bằng $\lambda = 10^{-5}$cm. Xác định kích thước phân tử của không khí.

5.83 (KB1 – 74). Với chất khí lý tưởng đơn nguyên tử diễn ra quá trình kín (chu trình) cho ta trên hình. Tại điểm C, khí có thể tính V_C và áp suất P_C, còn tại điểm B khí có thể tích V_B và áp suất P_B. $V_B = \frac{V_C}{2}$, $P_B = 2P_C$. Tìm hiệu suất của chu trình này và so sánh nó với hiệu suất lý thuyết cực đại của chu trình ở đó, nhiệt độ đốt nóng và làm lạnh tương ứng bằng nhiệt độ cực đại và cực tiểu của chu trình khảo sát.



5.84 (KB12 – 75). Trong hình trụ dưới pittông không trọng lượng, diện tích S có chất khí dưới áp suất P_0 và nhiệt độ T_0. Thể tích trong của hình trụ được phân thành hai phần bằng nhau bởi vách ngăn nằm ngang cố định có khe hẹp. Tải khối lượng M đặt lên pittông dưới tác dụng của nó pittông dịch gần tới vách ngăn. Tìm nhiệt độ T của khí trong bình trụ nếu thành hình trụ và pittông không truyền nhiệt (C_V không khí cho bằng $C_V = \frac{5}{2}R$).

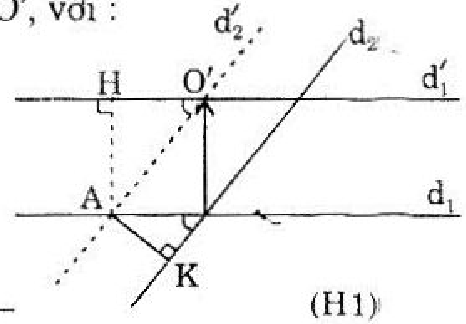
HƯỚNG DẪN GIẢI

1.1. Sau 1 giây, d_1 đến vị trí d'_1, $AH = v_1$

d_2 đến vị trí d'_2, $AK = v_2$

$\vec{v} = \overrightarrow{OO'}$ là vận tốc của giao điểm O.

Dùng định lý hàm số cosin cho tam giác OAO', với :



(H1)

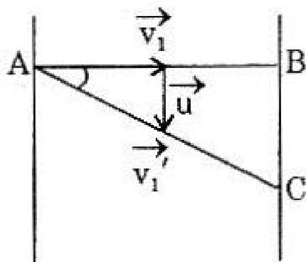
$$AO' = \frac{v_1}{\sin 60^0} = \frac{2v_1}{\sqrt{3}}$$

$$AO = \frac{v_2}{\sin 60^0} = \frac{2v2}{\sqrt{3}}$$

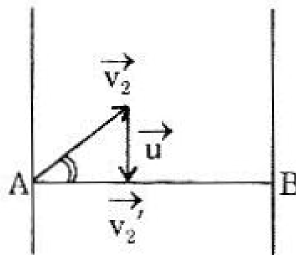
$$v = OO' = \sqrt{\left(\frac{2v_1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{2v2}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2\frac{v_1}{\sqrt{3}}.\frac{v2}{\sqrt{3}}.\frac{1}{2}}$$

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}v_1^2 + \frac{4}{3}v_2^2 - \frac{v_1 v_2}{3}} = \sqrt{\frac{88}{3}}\frac{m}{s} = 5,42\frac{m}{s}.$$

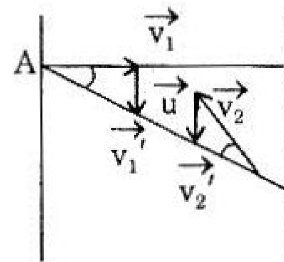
1.2



(H.2a)



(H.2b)



(H.2c)

a) Từ hình 2a, ta thấy vận tốc ca nô : $v_1 = u\sqrt{3}$

Từ hình 2a, để ca nô có quỹ đạo AB thì vận tốc tổng hợp $\vec{v_2}$ phải có hướng AB. Ta có góc lệch β, với :

$$\sin\beta = \frac{u}{v_2} = \frac{u}{u\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \beta = 35,27^0$$

Thời gian sang sông là t' :

$$t' = \frac{AB}{v_2'} = \frac{AB}{v2.\cos\beta} = \frac{t}{\cos\beta} = 122,47\ (s).$$

b) Trong hình 2c. Muốn vẽ theo quỹ đạo CA thì vận tốc tổng hợp v_2' phải

trùng phương CA.

Tính trên hai tam giác vận tốc cho cạnh có chiều dài là u chồng khít nhau. Ta có 1 tam giác cân, 2 cạnh bên là $v_1 = v_2$.

Vậy : $x = \alpha = 30^0$.

Phải nghiêng so với quỹ đạo CA một góc $x = 30^0$

Thành phần sang ngang của vận tốc bây giờ là $v_2 \sin 30^0$ (góc giữa $\overrightarrow{v_2}$ và bờ sông BC là 30^0).

Thời gian sẽ là : $t_{CA} = \dfrac{AB}{v_2 \sin 30^0} = 200$ (s).

Chú ý : Ta có thể giải theo định lý hàm số sin.

1.3. Ký hiệu l, l' lần lượt là khoảng cách giữa hai vận động viên trước và sau lúc chạy theo huấn luyện viên, t là khoảng thời gian giữa 2 lần gặp huấn luyện viên liên tiếp nhau.

Ta có : $$t = \frac{l}{v_1 + v_2}$$

Đồng thời : $$t = \frac{l'}{v_2}$$

Vậy : $$l' = \frac{v_2}{v_1 + v_2}.l$$

Ký hiệu L' là chiều dài của đoàn lúc về thì số vận động viên

$$N = \frac{L}{l} + 1 = \frac{L'}{l'} + 1$$

Vậy : $$L' = L.\frac{l'}{l} = L.\frac{v_2}{v_1 + v_2} = 20.\frac{\frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}} = 8 \text{ (m)}$$

1.4. Ký hiệu : Ô tô là vật 1.

Xe máy là vật 2.

Ảnh xe máy là vật 3.

Cột điện là vật 4.

Chọn chiều dương là chiều chuyển động của hai xe.

Vận tốc của xe máy so với ô tô là :

$$v_{21} = v_2 - v_1 = 10 \text{ km/h}$$

a) So với ô tô thì ảnh của xe có vận tốc bằng và ngược chiều với vận tốc

của xe máy so với ô tô :

$$v_{31} = -v_{21} = 10 \text{ km/h}.$$

b) Theo công thức cộng vận tốc : Vận tốc của ảnh xe máy so với xe máy là :

$$v_{32} = v_{31} + v_{12} = v_{31} + (v_1 - v) = -10 + (30 - 40)$$
$$= -20 \text{ km/h}.$$

c) Vận tốc của ảnh xe máy so với cột điện là :

$$v_{34} = v_{32} + v_{24} = -20 + 40 = 20\text{km/h}.$$

1.5. a) Phương pháp tọa độ :

Phương trình tọa độ thời gian của vật A là :

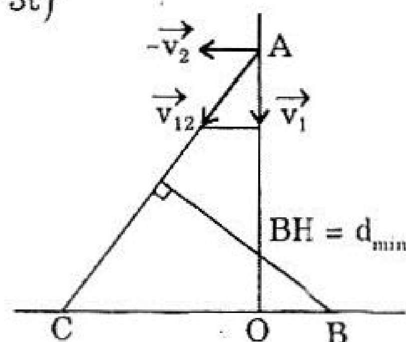
$$y = 40 - 4t$$

của vật B là : $x = 10 + 3t$

Khoảng cách tức thời là :

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(40 - 4t)^2 + (10 + 3t)^2}$$

Suy ra : $d_{min} = 32$ (m).



b) Dùng vận tốc tương đối coi B đứng yên, A chuyển động với vận tốc tương đối $\overrightarrow{v_{12}}$ so với B quỹ đạo tương đối là AC. Vậy BH là khoảng cách ngắn nhất cần tìm.

Các tam giác vuông $\widehat{Av_1v_2}$, $\widehat{AOC}$, $\widehat{BHC}$ đồng dạng nhau và cùng có tỷ lệ các cạnh là 3 : 4 : 5.

$\widehat{AOC} \rightarrow$ OC = 30 (m) hay BC = 40 (m)

$\widehat{AHC} \rightarrow$ BH = 4/5 BC = 32 (m).

1.6. Do $v_0 > v_B$ nên các vận tốc trung bình

$$\overline{v_3} > \overline{v_1}$$

$$\overline{v_4} > \overline{v_2}$$

Kết quả là $t_3 < t_1$

$$t_4 < t_2$$

$$t_3 + t_4 < t_1 + t_2$$

Đi theo đường ADC hết thời gian ít hơn.

1.7. Gọi v_1, v_2 lần lượt là vận tốc của tàu và của nhân viên so với đất, l là khoảng cách hai đầu tàu khi ngược chiều.

$$v_1 + v_2 = \frac{1}{3} \qquad (1)$$

Khi cùng chiều $\qquad v_1 - v_2 = \frac{1}{7} \qquad (2)$

Từ (1) và (2) $\qquad 2v_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{10\ell}{21}$

$$v_1 = \frac{10\ell}{42} = \frac{5}{21}\ell$$

Khi đứng yên thì cứ sau một thời gian t_1 có 1 tàu đi qua :

$$t_1 = \frac{1}{v_1} = 4{,}1 \text{ phút.}$$

1.8. *Cách giải thứ nhất :*

Giả sử vận động viên thả quả bóng từ A, bơi ngược lên đến B thì quay lại, đúng lúc vận động viên ở B thì quả bóng trôi đến C. Sau đó đi cùng chiều và gặp nhau ở C.

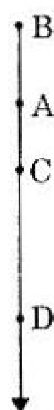
Gọi v là vận tốc của vận động viên so với nước. t_0 là thời gian bơi ngược, ta có :

$$AB = (v - u)\, t_0 \qquad (1)$$

$$AC = ut_0 \qquad (2)$$

Gốc thời gian lúc người vận động viên quay lại, gốc tọa độ là B, chiều dương như hình vẽ phương trình của vận động viên.

$$x_1 = (v + u)\, t \qquad (3)$$



của quả bóng : $\qquad x_2 = x_{02} + ut$

Từ (1), (2) ta có : $\qquad x_{02} = BC = (v - u)\, t_0 + ut_0 = vt_0 \qquad (4)$

$$x_2 = vt_0 + ut \qquad (5)$$

Khi gặp nhau tại D, $x_1 = x_2$, từ (3) và (5), ta có :

$$t = t_0 = 10 \text{ phút}$$

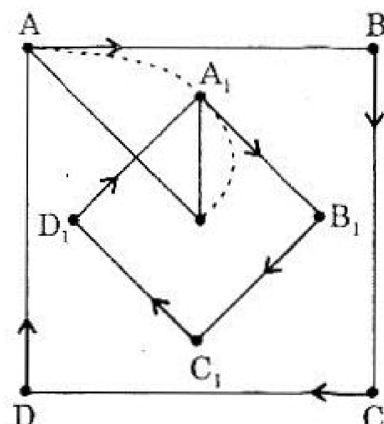
quả bóng đã trôi trong thời gian $t + t_0 = 20$ phút

$$u = \frac{400\text{m}}{20 \text{ phút}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{phút}}.$$

Cách thứ hai : Chọn hệ quy chiếu là mặt nước chảy. Vậy quả bóng đứng yên. Vận động viên từ quả bóng đi với vận tốc v hết 10 phút, thì lúc trở về cũng hết 10 phút. Vậy thời gian tổng cộng là 20 phút.

Vận tốc dòng nước là : $u = \frac{400\text{m}}{20 \text{ phút}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{phút}}$

1.9. Do sự bình đẳng của 4 chú rùa nên tại mỗi thời điểm chúng đều ở trên một hình vuông. Các hình vuông có cùng tâm 0, quay theo chiều chuyển động, nhỏ dần và cuối cùng thu lại 1 điểm là tâm 0. Chúng sẽ gặp nhau 1 lúc tại tâm 0.



Quỹ đạo của 1 chú rùa là 1 đường xoắn ốc. Tại bất cứ thời điểm nào, thành phần hướng tâm 0 của vận tốc đều là $v_{\cos\alpha}$.

Vậy sau thời gian $t = \dfrac{AO}{V_{CD}\cos\alpha} = \dfrac{a}{v\cos\alpha}$

$$t = \frac{a\sqrt{2}}{v}$$

thì chúng gặp nhau.

1.10. – Giả sử đó là chuyển động nhanh dần đều có vận tốc ban đầu là v_0, gia tốc là a.

Ta tìm v_0 và a nhờ 2 phương trình

Đường đi trong giây đầu : $h = S_1 = v_0.1 + a.\dfrac{1^2}{2} = v_0 + \dfrac{a}{2}$ (1)

Đường đi trong 2 giây đầu : $S_2 = v_0.2 + a.\dfrac{2^2}{2} = 2v_0 + 2a$

Đường đi trong giây thứ hai : $l_2 = S_2 - S_1 = v_0 + \dfrac{3a}{2}$ (2)

Giải hệ : $\begin{cases} 1 = v_0 + \dfrac{a}{2} \\ 2 = v_0 + \dfrac{3a}{2} \end{cases}$ Ta có : $\begin{cases} v_0 = 0,5\dfrac{m}{s} \\ a = 1\dfrac{m}{s^2} \end{cases}$ (3)

* Thử thay (3) vào giây thứ n

$$l_n = S_n - S_{n-1} = \left(v_0.n + a\frac{n^2}{2}\right) - \left[v_0(n-1) + a\frac{(n-1)^2}{2}\right]$$

$$= v_0 + \frac{a}{2}(2n-1) = 0,5 + \frac{1}{2}(2n-1) = n\,.$$

Kết luận :

a) Một chuyển động nhanh dần đều có v_0=0,5m/s, có a =1 m/s^2, có đường đi như trên.

b) Ngược lại, một chuyển động có đường đi như trên, không nhất thiết là chuyển động nhanh dần đều.

1.11. Vận tốc trung bình của giây đầu, cũng là đường đi của giây đầu là:

$$1 = \frac{v_0 + a_1}{2} = v_0 + \frac{a}{2} \qquad (1)$$

Vận tốc trung bình của giây cuối bằng đường đi của giây cuối là :

$$1t = \frac{1}{2}\left[(v_0 + at) + v_0 + a(t-1)\right] = \frac{1}{2}\left[2v_0 + 2at - a\right] \qquad (2)$$

Vận tốc cuối bằng 0, nên : $v_0 + at = 0$ (3)

Từ (2), (3) suy ra đường đi trong giây cuối là : $1_t = -\frac{a}{2}$

Ta có : $\begin{cases} 9{,}5 = v_0 + \dfrac{a}{2} \\ 0{,}5 = -\dfrac{a}{2} \end{cases}$

$a = -1 m/s^2$

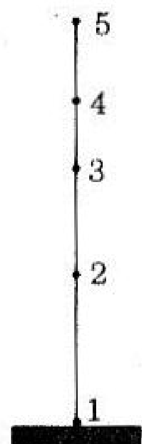
$v_0 = 10\ m/s^2$

1.12. Gọi t_0 là thời gian cần thiết để tách ra được 1 giọt.

Hạt 1 rơi trong thời gian $4t_0$

Hạt 2 rơi trong thời gian $3t_0$

Hạt 3 rơi trong thời gian $4t_0$



Ta có chiều cao mái nhà : $h = h_1 = \frac{g}{2}(4t_0)^2$

Đường đi của hạt 2 : $h_2 = \frac{g}{2}(3t_0)^2$

Đường đi của hạt 3 : $h_3 = \frac{g}{2}(2t_0)^2$

Khoảng cách giữa hạt 2 và 3 lúc đó là :

$$h_2 - h_3 = \frac{g}{2}5{t_0}^2$$

Từ (2), (3) ta suy ra : $h = \frac{16}{5}(h_2 - h_3) = 8\ (m)$.

Cách thứ 2 : Đúng lúc hạt 5 xuất phát, khoảng cách giữa các hạt có thể coi là đường đi của các khoảng thời gian liên tiếp bằng nhau, chúng tỷ lệ với các số nguyên lẻ liên tiếp.

$l_{45} : l_{34} : l_{23} : l_{12} = 1 : 3 : 5 : 7$

$l_{23} = 2{,}5$ nên $l_{12} = 3{,}5$, $l_{34} = 1{,}5$, $l_{12} = 0{,}5$

$h = 0{,}5 + 1{,}5 + 2{,}5 + 3{,}5 = 8\ (m)$.

1.13. Gọi v_A, v_B, v_C, v_D là vận tốc của tàu khi điểm A, B, C, D qua vị trí nhân viên đứng.



$v_A = v_0$

$v_B = v_0 + 20a$

$v_C = v_0 + 45a$

$v_D = v_0 + 45a + at_3$

t_3 là thời gian mà toa 3 đi qua trước mặt nhân viên

Tính đường đi từ vận tốc trung bình

$$l \;=\; 20\frac{v_0 + (v_0 + 20a)}{2} = 25\frac{(v_0 + 20a) + (v_0 + 45a)}{2}$$

$$= \; t\,\frac{(v_0 + 45a) + (v_0 + 45a + at)}{2}$$

Từ phương trình (2) ta có : $8\,(v_0 + 10a) = 5\,(2v_0 + 65a)$

Suy ra : $v_0 = -\dfrac{245}{2}a$

Thay v_0 vào (1), ta có : $l = -\,2250\,a$

Từ (3), ta có : $l = -\,2250a = \dfrac{t}{2}\left[2v_0 + 90a + at\right]$

$$t^2 - 155t + 4500 = 0 \qquad (4)$$

Phương trình (4) cho ta 2 nghiệm dương

$t_1 = 38{,}7$ (s), $\qquad t_2 = 116{,}3$ (s) (loại)

Nghiệm t_2 ứng với trường hợp tàu dừng rồi, quay lại đi nhanh dần đều với gia tốc (a).

1.14. a) Đường đi trong n giây là : $S_n = v0n + a\dfrac{n^2}{2}$

Đường đi trong (n–1) giây trước đó là :

$$S_{n-1} = v_0(n-1) + a\,\frac{(n-1)^2}{2}$$

Đường đi trong giây thứ n : $\quad l_n = S_n - S_{n-1}$

$$\boxed{l_n = \; v_0 + \frac{a}{2}(2n-1)}$$

b) Thời gian đi n mét là nghiệm của phương trình :

$$n = v_0 t_n + \frac{a}{2} t_n^2$$

Nghiệm là : $t_n = \dfrac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2an}}{a}$

Suy ra thời gian đi (n–1) mét đầu tiên

$$t_{n-1} = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2a(n-1)}}{a}$$

Vậy thời gian đi mét thứ n là:

$$\Delta t = t_n - t_{n-1} = \frac{\sqrt{v_0^2 - 2an} - \sqrt{v_0^2 - 2a(n-)}}{a}.$$

1.15. Đường đi tính từ đồ thị : $S = v_{max} \times \dfrac{12+6}{2} = 9v_{max}$

Tính từ vận tốc trung bình : $S = v_{tb}.\ t = 12.\ 9$

Vậy : $U_{max} = 12$ m/s.

a) Giai đoạn 1, đồ thị OA, ứng với $0 \le t \le 4$

$$x_{01} = 0, a_1 = \frac{12}{4} = 3\ ;\quad v_{01} = 0;\ t_{01} = 0$$

$$x_1 = \frac{3t^2}{2}. \qquad (1)$$

b) Giai đoạn 2, ứng với đoạn AB trên đồ thị; $4 \le t \le 10$

$x_{02} = 24$, tính từ (1)

$v_{02} = 12$, $a_2 = 0$, $t_{02} = 4$.

$x_2 = 24 + 12\,(t - 4)$. (2)

c) Giai đoạn 3, đi chậm dần đều, đồ thị BC ứng với khoảng thời gian $10 \le t \le 12$

$x_{03} = 96$, tính từ (2)

$v_{03} = 12$

$a_3 = -6$

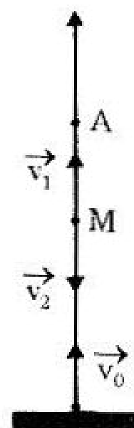
$t_{03} = 10$

$$x_3 = 96 + 12(t - 10) - 6\frac{(t-10)^2}{2}$$

$$x_3 = -3t^2 + 72t - 324.$$

1.16.

1. Hệ qui chiếu : Gốc tọa độ là nơi xuất phát chiều dương từ dưới lên gốc thời gian là lúc xuất phát



$$y = y_0 + v_0(t - t_0) + a\frac{(t - t_0)^2}{2}$$

$$y_0 = 0,\ a = -g,\ t_0 = 0$$

$$y = v_0 t - \frac{gt^2}{2} \qquad (1)$$

Phương trình này chung cho cả 2 giai đoạn.

2. Thời gian đi, dựa vào vận tốc tức thời của điểm cao nhất là điểm A

$$v_A = 0 = v_0 - gt_A \rightarrow t_A = \frac{v_0}{g} \qquad (2)$$

Thời gian về bằng thời gian đi, vì vận tốc trung bình như nhau, đường đi như nhau :

Vậy : $$t_1 = t_2 = t_A = \frac{v_0}{g} \qquad (2)$$

3. Độ cao cực đại có thể tính theo 1 trong 2 cách

a) Thay $t_A = \frac{v_0}{g}$ vào (1) ta có : $h_{max} = y_A = \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g}$

b) Lấy cực đại của y từ (1) : $y_{max} = -\frac{"\Delta"}{4a} = -\frac{v_0^2}{4\left(\frac{-g}{2}\right)} = \frac{v_0^2}{2g}$

Vậy : $$h_{max} = \frac{v_0^2}{2g}. \qquad (3)$$

4. Áp dụng công thức $v_t^2 - v_0^2 = 2aS$ cho đoạn MA lúc đi và lúc về

Lúc đi : $v_0^2 - v_1^2 = 2\,(-g).\,S$

Lúc về : $v_1^2 - v_0^2 = 2\,(g).\,S$

Suy ra : $v_1^2 = v_1^2$ (đpcm).

5. Áp dụng kết quả 4, thì $\overrightarrow{v_t} = -\overrightarrow{v_0}$.

1.17.

1. Chọn gốc tọa độ là vị trí sàn, đúng lúc đinh rời sàn chiều dương hướng từ dưới lên. Gốc thời gian cũng là lúc đó.

Phương trình của sàn là : $$y_1 = v_0 t + \frac{at^2}{2} = 2t + t^2 \qquad (1)$$

Phương trình của đinh là : $y_2 = v_0t - \frac{gt^2}{2} + h = -5t^2 + 2t + 6$ (2)

Lúc chạm sàn, $y_1 = y_2$ nên : $2t + t^2 = -5t^2 + 2t + 6 \Rightarrow t = 1s$.

2. Chuyển động của đinh là chuyển động ném lên.

a) Thời gian đi lên là : $t_1 = \frac{v_0}{g} = \frac{2}{10} = 0{,}2$ (s)

Quãng đường đi lên là : $S_1 = \frac{v_0^2}{2g} = 0{,}2$ (m)

Thời gian đi xuống là $t_2 = t - t_1 = 0{,}8$ (s)

Quãng đường đi xuống là : $S_2 = \frac{gt_2^2}{2} = 5.0{,}8^2 = 3{,}2$ (m)

Tổng hai đường đi là : $S = S_1 + S_2 = 3{,}4$ (m).

b) Đinh dịch được 1 đoạn là : $S' = S_2 - S_1 = 3$ (m)

Điểm tiếp sàn thấp hơn điểm xuất phát là 3 (m).

c) Thang máy đi được 1 đoạn: $y_1 = 2.1 + 1^2 = 3$ (m)

Thang đi lên được 3 (m).

Chú ý : Nếu chỉ cần tìm thời gian đinh rơi, ta chọn hệ quy chiếu là thang máy. Đinh rơi tự do với gia tốc :

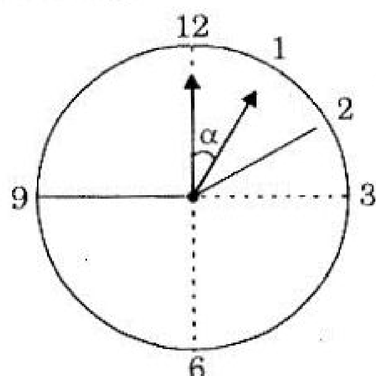
$$\vec{g'} = \vec{g} - \vec{a}, \qquad g' = 12\frac{m}{s^2}$$

Thời gian rơi là : $6 = 12\frac{t^2}{2} = 6t \rightarrow t = 1s$.

1.18

a) * Từ lần trùng nhau trước đến lần tiếp theo, kim giờ nhích được một góc α thì kim phút phải quay một vòng + thêm góc α.

Giữa 2 lần gặp, kim phút quay nhiều hơn kim giờ 1 vòng.



* Tốc độ kim phút là : $1\frac{\text{vòng}}{\text{giờ}}$;

của kim giờ là : $\frac{1}{12}\frac{\text{vòng}}{\text{giờ}}$.

Vậy sau 1 giờ kim phút quay nhiều hơn kim giờ :

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{11}{12}\text{ vòng}$$

* Vậy khoảng thời gian giữa hai lần gặp nhau là : $\Delta t = \frac{1\text{ vòng}}{\frac{11\text{ vòng}}{12\text{ giờ}}}$

* Ta biết lúc 0^h, 2 kim trùng nhau. Vậy các thời điểm mà 2 kim trùng nhau là : 0h, $1\frac{1}{11}$ h , $2\frac{2}{11}$ h, ... $n\frac{n}{11} = \frac{12}{11}n$ (n nguyên).

b) Chu kỳ lặp lại của sự kiện 2 kim thẳng hàng hay hai kim vuông góc cũng là $T = \frac{12}{11}$ giờ

Hai kim thẳng hàng, tính khởi điểm từ 6 giờ.

Vậy lúc $\left(6 + \frac{12}{11}n\right)$ thì hai kim thẳng hàng.

Tương tự, hai kim vuông góc có hai họ nghiệm là :

$$\left(6 + \frac{12}{11}n\right) \quad \text{và} \quad \left(3 + \frac{12}{11}n\right) \text{giờ.}$$

1.19. Ký hiệu $\overrightarrow{v_{12}}$ là vận tốc dài của các điểm A, B, C, D so với trục O

$\left|\overrightarrow{v_{12}}\right| = \omega R$ có phương chiều và tiếp tuyến.

$\overrightarrow{v_{23}}$ là vận tốc của trục O so với đất, ta có $\overrightarrow{v_{23}} = \vec{v}$

$\overrightarrow{v_{13}}$ là các vận tốc ta cần tìm của A, B, C, D lần lượt ký hiệu là $\overrightarrow{v_A}$, $\overrightarrow{v_B}$, $\overrightarrow{v_C}$, $\overrightarrow{v_D}$.

1. Do lăn không trượt nên $\overrightarrow{v_A} = 0$

$\overrightarrow{v_A} = \overrightarrow{\omega R_A} + \vec{v}$

Chiếu lên chiều chuyển động : $0 = -\omega R + v$

Vậy : $v = \omega R$.

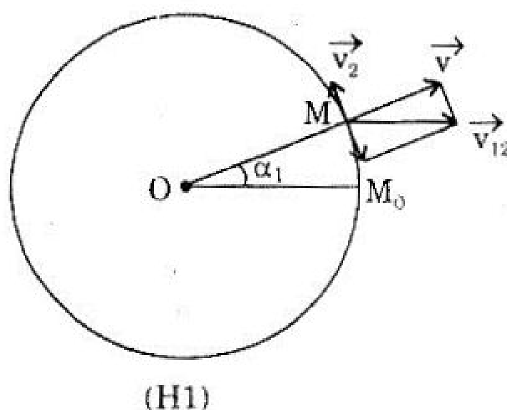
2. a) $V_A = 0$

b) $V_B = \omega R + V = 2V$

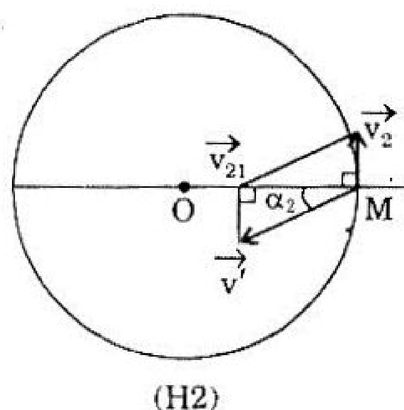
c) $\overrightarrow{V_C}$ nghiêng so với phương ngang 45^0 (chếch lên) $V_D = V\sqrt{2}$.

d) $\overrightarrow{V_D}$ nghiêng so với phương ngang 45^0 (chếch lên) $V_D = V\sqrt{2}$.

1.20.



(H1)



(H2)

1. Người ở tâm phải bắn đón, ngắm chếch về phía trước một góc α, sao cho khi người thứ hai 2 quay từ M_0 đến M thì đạn cũng vừa đến từ O đến M.

$$\alpha_1 = \omega t = \omega \frac{R}{v} \qquad (1)$$

Với v là vận tốc đạn so với đất

Người ở ngoài phải ngắm ngược lại để cho vận tốc tổng hợp của đạn so với người thứ nhất, có hướng m_0.

$$\sin\alpha_2 = \frac{v_2}{v'} = \frac{\omega R}{v} \quad (v' = v \text{ là vận tốc đạn so với đất})$$

2. Người ở tâm lợi thế hơn vì hai lẽ :

a) Thời gian đạn đi tới đích ngắn hơn

$$t_1 = \frac{R}{v}, \quad t_2 = \frac{R}{v'\cos\alpha_2} = \frac{R}{v\cos\alpha_2}$$

$$t_2 > t_1$$

b) Vận tốc đạn so với mục tiêu lớn hơn

Vận tốc đạn của người 1 so với người 2 là :

$$v_{12} = \sqrt{v^2 + \omega^2 R^2}$$

Vận tốc đạn của người 2, so với người 1 là :

$$v_{21} = \sqrt{v^2 + \omega^2 R^2}$$

$$t_{12} > t_{21}.$$

1.21.

a) Gọi t là thời gian rơi tự do của 1 giọt : $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

Nếu t = nT, T là chu kỳ quay thì nước chỉ vào một lỗ, ta có :

$$\sqrt{\frac{2h}{g}} = n.\frac{2\pi}{\omega}$$

Vậy : $$\omega = n.2\pi\sqrt{\frac{2h}{g}}, \qquad n \in N. \qquad (1)$$

b) Nếu $t = (n + \frac{1}{3})T$

Thì lần đầu rơi tại A, sau 1 vòng và 1/3 vòng rơi vào B, sau 1 vòng và 1/3 vòng rơi vào C, v.v...

Vậy : $$\omega = \left(n + \frac{1}{3}\right)2\pi\sqrt{\frac{g}{2h}}, \qquad n \in N. \qquad (2)$$

c) Tương tự nếu $t = \left(n + \frac{1}{3}\right)T$ thì ban đầu rơi vào lỗ A, tiếp theo rơi vào C, tiếp theo rơi vào B.

Vậy : $\omega = \left(n + \frac{2}{3}\right)2\pi\sqrt{\frac{g}{2h}}$. (3)

1.22.

a) Để đứng yên trên bầu trời nó phải

α) Chuyển động tròn đều theo hướng Tây – Đông

β) Mặt phẳng quỹ đạo chứa đường xích đạo để trọng lực vừa vặn gây ra gia tốc hướng tâm.

b) Lực vạn vật hấp dẫn đóng vai trò lực hướng tâm

$$F_n = \frac{GMn}{r^2} = m\omega^2.$$

Suy ra : $r = \sqrt{\frac{GM}{\omega^2}}$

Thay $G = 6{,}67.10^{-11}$, $M = 6.10^{24}$, $\omega = \frac{2\pi}{24.3600}$

Ta có : $r \approx 19548$ km

$h = r - R = 13148$ km.

c) Vận tốc dài : $v = \omega = 1421$ m/s.

1.23.

Gọi v_0, α là độ lớn của vận tốc ban đầu, và góc nghiêng của bóng ném.

Thời gian chuyển động là : $t = 2.\frac{v_0.\sin\alpha}{g}$

Độ cao cực đại sẽ là : $h_{max} = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g} = \left(\frac{v_0\sin\alpha}{2g}\right).2g = 2g.t^2$

Thay $g = m/s^2$, $t = 1s$.

Ta có : $h_{max} = 20$ (m).

1.24.

a) Quỹ đạo phải đi sát A và B và vận tốc v_1 ở A phải nhỏ nhất vừa đủ vượt qua B.

Muốn vậy góc α của $\overrightarrow{v_1}$ tại A phải là 45^0

Khi đó $IE = h_{max} = \frac{v_1^2.\cos^2 45^0}{2g} = \frac{v_1^2}{4g}$

$AB = S = \frac{v_1^2.\sin 90^0}{g} = \frac{v_1^2}{g}$

$IE = 1/4\ AB = 2(m)$

Quỹ đạo parabol $y = ax^2 + bx + c$

$b = 0$ (do chọn hệ tọa độ); $c = EO = 22$ (m)

Tọa độ điểm B là (4, 20)

Nên $20 = 16a + 22 \Rightarrow a = -\frac{1}{8}$

$$y = -\frac{x^2}{8} + 22$$

b) Vị trí ném : Cho $y = 0$

Ta có $x^2 = 176 \Rightarrow x = \pm 4\sqrt{11}$

ném từ M, hoặc ngược lại từ N với $MO = ON = 4\sqrt{11}$ (m).

1.25. Nếu không có tường thì vật đi theo quỹ đạo của vật ném ngang. Với I'_2 đối xứng với I_2 qua mặt CD và $I_2'D'$ đồng dạng với I_2D

Ta có : $BD' = 3BD = 30$ m

Độ cao của chuyển ném ngang :

$h = AB = 15$ m

Tầm xa $S = BD' = 30$ (m)

$$v_0 = \frac{S}{t}, \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$v_0 = S\sqrt{\frac{g}{2h}} = 30\sqrt{\frac{10}{30}} = 10\sqrt{3}\ \frac{m}{s}.$$

Vận tốc tại D' :

$$v_{D'} = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = \sqrt{300 + 2gh} = \sqrt{600} = 10\sqrt{6}$$

$\overrightarrow{v_{D'}}\begin{cases} v_x = 10\sqrt{3} \\ v_y = 10\sqrt{3} \end{cases}$. Góc nghiêng của vận tốc là 45^0.

1.26. Vận tốc v' liên hệ với v và v_0 bằng công thức :

$$\vec{v'} = \vec{v} - \vec{v_0}$$

Áp dụng định lý cosin ta được:

$$v' = (v_0^2 + v^2 + 2v_0.v.\cos\varphi)^{1/2} \approx 40 \text{ km/h}$$

Áp dụng hệ thức trong tam giác ta có

$$\sin\varphi' = \frac{v\sin(180 - \varphi)}{v'}$$

$$\varphi' = \arcsin\frac{3\sqrt{3}}{16} \approx 19^0$$

1.27. Định luật chuyển động của các đầu B và đầu A là:

$$y_B = v.t$$

$$x_A = \sqrt{(n+m)^2 - v^2t^2}$$

Định luật chuyển động của điểm M:

$$x_M = \frac{n}{n+m}\sqrt{(n+m)^2 - v^2t^2},$$

$$y_M = \frac{m}{n+m}v.t$$

Lấy đạo hàm của x_M, y_M theo thời gian ta được thành phần vận tốc của điểm M.

$$v_{x_M} = -\frac{n}{n+m}\frac{v^2t}{\sqrt{(n+m)^2 - v^2t^2}}$$

$$v_{y_M} = \frac{m}{n+m}.v$$

Lấy đạo hàm các thành phần vận tốc theo thời gian ta được các thành phần gia tốc.

$$a_{x_M} = -\frac{n.v^2(n+m)}{\left[(n+m)^2 - v^2t^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$a_{y_M} = 0.$$

1.28.

a) Gia tốc của chuyển động cho bởi

$$a = \frac{v_B - v_A}{t} \qquad (1)$$

Từ đây suy ra: $v_A = v_B - at$ (2)

Nếu lấy gốc thời gian là lúc ô tô qua điểm A ta có :

$$S_{AB} = \frac{1}{2}a.\,t^2 + v_A t \qquad (3)$$

Từ (1) – (3) suy ra : $a = \dfrac{2(v_B t - S_{AB})}{t^2} = 2\ m/s^2$

$$v_A = 8\ m/s.$$

b) Vì vận tốc ô tô lúc khởi hành $v_0 = 0$ nên ta có:

$$v_A = a.\,t_A$$

$$S_A = \frac{1}{2}\,a.t_A^2 = \frac{1}{2}.a.\left(\frac{v_A}{a}\right)^2 = \frac{1}{2}\,\frac{v_A^2}{a} = 16\ m.$$

1.29. Phương trình chuyển động của viên đạn trong tấm gỗ có thể viết như sau:

$$m\,\frac{dv}{dt} = -\,kv^2 \qquad \text{(k hệ số tỷ lệ)}$$

(Dấu trừ có ý nghĩa là lực cản ngược chiều với hướng chuyển động).

Phương trình vi phân trên có thể viết trong hai dạng khác nhau:

$$dt = -\,\frac{m}{k}.\frac{dv}{v^2} \qquad \text{hoặc} \qquad ds = \frac{m}{k}\frac{dv}{v}$$

Trong đó: ds là vi phân của quãng đường đi ($\dfrac{ds}{dt} = v$)

Lấy tích phân của hai phương trình đó ta được:

$$t = \frac{m}{k}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0}\right), \qquad h = \frac{m}{k}.\ln.\frac{v_0}{v},$$

Loại trừ hệ số $\dfrac{m}{k}$ ta được: $t = \dfrac{h(v_0 - v)}{v_0 v \ln\left(\dfrac{v_0}{v}\right)}$.

1.30. Khoảng cách giữa hai vật ở một thời điểm t bất kỳ (l) được xác định từ công thức:

$$l^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

(x_1, y_1), (x_2, y_2) tọa độ tương ứng của vật 1 và 2 (chất điểm) :

$$0 \quad \begin{cases} y_1 = vt - g\dfrac{t^2}{2}, \; x_1 = 0, \\ y_2 = v\sin\theta.t - g\dfrac{t^2}{2}\,4 \\ x_2 = v.\cos\theta.t \end{cases}$$

Giải hệ này ta được : $l = v.\,t\,\sqrt{2(1-\sin\theta)} = 22$ m.

1.31. Khoảng cách l giữa hai hạt tại thời điểm t bất kỳ là:

$$l = [(l_1 - v_1 t)^2 + (l_2 - v_2 t)^2]^{1/2}$$

Tìm điều kiện cực tiểu của hàm $l(t)$ ta tìm được thời gian ứng với khoảng cách cực tiểu:

$$t_{min} = \frac{v_1 l_1 + v_2 l_2}{v_1^2 + v_2^2}, \quad \text{còn} \quad l_{min} = \frac{|l_1 v_2 - v_1 l_2|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}.$$

1.32. Nếu gọi khoảng thời gian giữa hai lần bắn là τ thì tọa độ của hai viên đạn ở thời điểm t bất kỳ là:

$$x_1 = v_0 t.\cos\theta_1,$$

$$y_1 = v_0 t.\sin\theta_1 - g\frac{t^2}{2},$$

$$x_2 = v_0 (t-\tau)\cos\theta_2,$$

$$y_2 = v_0 (t-\tau)\sin\theta_2 - g\frac{(t-\tau)^2}{2},$$

Khi hai viên đạn gặp nhau thì : $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Giải hệ phương trình với điều kiện đó ta được :

$$\tau = \frac{2v_0}{g}.\frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)} = 11 \text{ s}.$$

1.33. Phương trình chuyển động của viên đạn có dạng:

$$x = v_0 \cos\theta.t$$

$$y = v_0 \sin\theta.t - g\frac{t^2}{2}$$

θ là góc tạo bởi vectơ $\vec{v}_0$ và phương x nằm ngang. Khi viên đạn trúng mục tiêu x = s, y = 0. Sử dụng điều kiện đó ta nhận được phương trình cho thời gian bay τ của viên đạn là:

$$g^2\tau^4 - 4v_0^2\tau^2 + 4s^2 = 0.$$

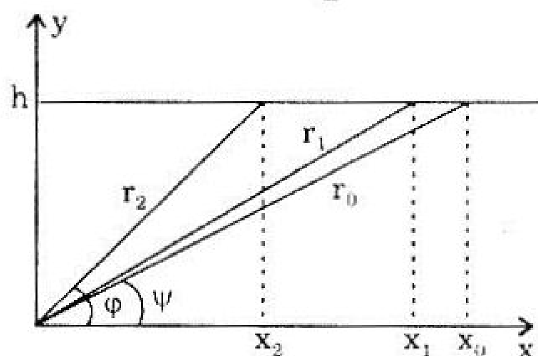
Giải ra ta được hai nghiệm tuỳ thuộc vào góc bắn:

$$\tau_{1.2} = \frac{\sqrt{2}v_0}{g}\left\{1 \pm \sqrt{1 - \frac{s^2 g^2}{v_0^4}}\right\}^{1/2},$$

$\tau_1 = 0{,}71$ phút và $\tau_2 = 0{,}41$ phút.

1.34.

a) Theo hình vẽ thì chiều cao $h = r_1.\sin\psi$. Khoảng cách $r_1 = \dfrac{ct_1}{2}$



b) Khoảng cách : $r_2 = \dfrac{ct_2}{2}$

Từ đây: $x_1 = r_1\cos\psi = \dfrac{ct_1}{2}\cos\psi$

$$x_2 = r_2\cos\varphi = \frac{ct_2}{2}\cos\varphi$$

Vận tốc máy bay :

$$v = \frac{x_1 - x_2}{T - \frac{1}{2}(t_1 - t_2)} = \frac{\frac{1}{2}c(t_1\cos\psi - t_2\cos\varphi)}{T - \frac{1}{2}(t_1 - t_2)}.$$

c) Khoảng cách từ máy bay đến trạm tại thời điểm truyền tín hiệu thứ nhất:

$$r_0 = \sqrt{h^2 + x_0^2}$$

$$x_0 = x_1 + \frac{vt_1}{2} = \frac{ct_1\cos\psi}{2} + \frac{vt_1}{2} = (c.\cos\psi + v)\frac{t_1}{2}$$

do đó: $$r_0 = \sqrt{\left(\frac{ct_1}{2}\sin\psi\right)^2 + (c.\cos\psi + v)^2\frac{t_1^2}{4}}$$

$$= \frac{t_1}{2}\sqrt{c^2 + v^2 + 2c.v\cos\psi}.$$

d) Vì tại thời điểm truyền tín hiệu thứ nhất, tính theo chiều nằm ngang khoảng cách từ máy bay đến trạm bằng x_0 nên máy bay sẽ bay qua trạm sau một thời gian:

$$t = \frac{x_0}{v} = \frac{c.\cos\psi + v}{v}.\frac{t_1}{2} = \frac{t_1}{2}.\frac{2T - t_1(1 - \cos\psi) + t_2(1 - \cos\varphi)}{t_1\cos\psi - t_2\cos\varphi}$$

hay là $$t = t_1\frac{T - t_1\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + t_2\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{t_1\cos\psi - t_2\cos\psi}.$$

Để giải bài toán này chỉ cần biết ba trong 4 số liệu cho trong đầu bài, bởi vì chúng liên hệ với nhau bằng hệ thức.

$$h = \frac{ct_1}{2}\sin\psi = \frac{ct_2}{2}\sin\varphi, \quad \text{tức là} \quad \sin\varphi = \frac{t_1}{t_2}\sin\psi$$

Chẳng hạn sử dụng các số liệu t_1, t_2 và ψ ta được biểu thức của vận tốc máy bay :

$$v = \frac{\frac{1}{2}c\left(t_1 \cos\psi - t_2\sqrt{1 - \left(\frac{t_1^2}{t_2^2}\right)\sin^2\psi}\right)}{T - \frac{1}{2}(t_1 - t_2)} = \frac{c\left(t_1 \cos\psi - \sqrt{t_2^2 - t_1^2 \sin^2\psi}\right)}{2\left[T - \frac{1}{2}(t_1 - t_2)\right]}$$

Trong trường hợp này

$$t = \frac{c.\cos\psi + v}{v}.\frac{t_1}{2}$$

$$= \frac{t_1}{2}.\frac{2T - (t_1 - t_2) + t_1\cos\psi - \sqrt{t_2^2 - t_1^2\sin^2\psi}}{t_1\cos\psi - \sqrt{t_2^2 - t_1^2\sin^2\psi}}.$$

1.35.

a) Ký hiệu vận tốc sóng âm bằng v, có thể viết điều kiện sóng âm đuổi kịp máy bay dưới dạng:

$$x = \frac{a(t+T)^2}{2} = vt,$$

ở đây t là thời gian tính từ khi có tiếng nổ. Do đó:

$$t^2 + 2(T - \frac{v}{a})t + T^2 = 0.$$

Điều kiện tồn tại nghiệm là phải thoả mãn bất đẳng thức:

$$4(T - \frac{v}{a})^2 - 4T^2 \geq 0, \qquad \text{tức là} \qquad T \leq \frac{v}{2a}$$

b) Giải phương trình bậc hai :

$$t^2 + 2\,(T - \frac{v}{a})t + T^2 = 0$$

ta được: $$t_1 = \frac{1}{2}\left[-2\left(T - \frac{v}{a}\right) - 2\sqrt{\frac{v}{a}\left(\frac{v}{a} - 2T\right)}\right] = \frac{v}{a} - T - \sqrt{\frac{v}{a}\left(\frac{v}{a} - 2T\right)}$$

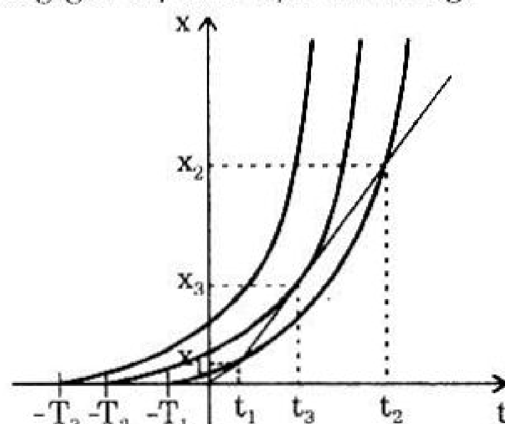
$$t_2 = \frac{v}{a} - T + \sqrt{\frac{v}{a}\left(\frac{v}{a} - 2T\right)}$$

Trong trường hợp $T = \frac{v}{2a}$, ta có : $t_1 = t_2 = \frac{v}{2a}$.

Sau thời gian t_1 sóng âm đuổi kịp máy bay, trái lại sau thời gian t_2 khi

máy bay có vận tốc lớn hơn vận tốc âm thanh, máy bay sẽ vượt đầu sóng này.

c) Theo hình bên, nhánh đường cong parabôn diễn tả chuyển động của máy bay, trái lại nửa đường thẳng – chuyển động của đầu sóng âm. Tang góc nghiêng của nửa đường thẳng bằng giá trị của vận tốc sóng.



Đối với thời gian $T_1 < \frac{v}{2a}$ tồn tại hai điểm cắt của các đường cong – ứng với hai thời gian t_1 và t_2. Đối với thời gian $T_2 = \frac{v}{2a}$ đường thẳng tiếp tuyến với parabôn ký hiệu tọa độ thời gian của điểm đó bằng t_3, ta có $t_3 = t_1 = t_2$.

Đối với $T_3 > \frac{v}{2a}$ sóng âm không bao giờ đuổi kịp máy bay.

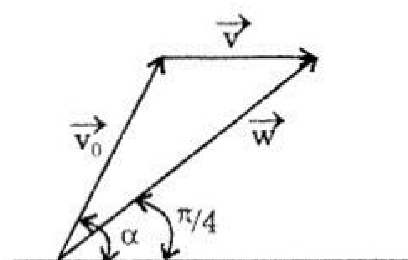
Các tọa độ không gian lần lượt bằng:

$$x_1 = v\,(t_1 + T) = v\left(\frac{v}{a} - \sqrt{\frac{v}{a}\left(\frac{v}{a} - 2T\right)}\right),$$

$$x_2 = v\,(t_2 + T) = v\left(\frac{v}{a} + \sqrt{\frac{v}{a}\left(\frac{v}{a} - 2T\right)}\right),$$

$$x_3 = v\,(t_3 + T) = \frac{v^2}{a}.$$

1.36. Ký hiệu vận tốc cực đại của bàn tay tại thời điểm ném bằng v_0 và vận tốc của người chạy khi ném bằng v. Để đạt được khoảng cách xa nhất việc ném phải được thực hiện sao cho hợp vận tốc $\vec{w} = \vec{v_0} + \vec{v}$ của hòn đá hợp với phương nằm ngang một góc $\beta = \frac{\pi}{4}$. Điều đó có nghĩa



các thành phần thẳng đứng và nằm ngang của $\vec{w}$ phải bằng nhau:

$$v_0\cos\alpha + v = v_0\sin\alpha,$$

hay $$v_0\cos\alpha + v = v_0\sqrt{1 - \cos^2\alpha}.$$

Bình phương cả hai vế của phương trình ta được:

$$2v_0^2\cos^2\alpha + 2vv_0\cos\alpha + v^2 - v_0^2 = 0$$

Từ đây $\quad \cos\alpha = \frac{1}{2}\left[-\frac{v}{v_0} + \sqrt{2 - \left(\frac{v}{v_0}\right)^2}\right]$

Bình phương của hợp tốc $\vec{W}$ thoả mãn hệ thức:

$$w^2 = v_0^2 + v^2 + 2vv_0\cos\alpha$$

Thay biểu thức thu được ở trên vào, ta có:

$$w^2 = v_0^2 + v\sqrt{2v_0^2 - v^2}$$

Khoảng ném xa nhất khi người đó đứng tại chỗ là $x_0 = \frac{v_0^2}{g}$. Và khi ném với vận tốc $\vec{w}$ là $x = w^2/g$. Vậy khi chạy người ném vật ném xa hơn được một khoảng :

$$\Delta x = x - x_0 = \frac{v}{g}\sqrt{2v_0^2 - v^2}$$

1.37.

a) Sự phụ thuộc vào thời gian của chiều cao vật thứ nhất :

$$h_1 = v_1 t - gt^2/_2$$

và của vật thứ hai : $\quad h_2 = v_2(t - t_1) - g(t - t_1)^2/_2$

Bởi vì tại điểm gặp nhau: $h_1 = h_2$ và $t = t_2$, nên ta có :

$$v_1 t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2 = v_2(t_2 - t_1) - \frac{1}{2}g(t_2 - t_1)^2$$

Giải ra ta được: $\quad t_2 = \frac{2v_2 + gt_1}{2(gt_1 - v_1 + v_2)}.t_1$

Nghiệm của bài toán chỉ có nghĩa khi $t_2 > 0$. Dễ dàng kiểm tra lại được rằng, điều kiện trên sẽ thỏa mãn giả thiết

$$0 < t_1 < \frac{2v_1}{g}, \quad \text{nếu} \quad t_1 > \frac{v_1 - v_2}{g}.$$

Vậy ta có hạn chế: $v_2 > v_1 - gt$.

Về mặt vật lý thì hạn chế trên có nghĩa là, để các vật có thể gặp nhau trên không thì vật thứ hai không thể rơi xuống đất trước khi vật thứ nhất được ném lên.

Trong trường hợp riêng, khi $v_1 = v_2$: $\quad t_2 = \frac{t_1}{2} + \frac{v_1}{g}$.

b) Thay giá trị của t_2 vào công thức về chiều cao h, nơi gặp nhau, và sau vài phép biến đổi đơn giản ta được:

$$h = v_1t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2$$

$$= \left(v_1 - \frac{g}{2}\frac{2v_2 + gt_1}{2(gt_1 - v_1 + v_2)}t_1\right)\frac{2v_2 + gt_1}{2(gt_1 - v_1 + v_2)}t_1$$

$$= \frac{(4v_1^2 - g_2t_1^2)[2(v_2 - v_1) + gt_1]t_1}{8(gt_1 + v_2 - v_1)^2}.$$

Giả thiết chấp nhận trong đầu bài và điều kiện về v_2 dẫn ra ở điểm a) đảm bảo giá trị dương của h.

Trong trường hợp riêng khi $v_1 = v_2$ công thức trở nên rất đơn giản :

$$h = \frac{1}{2}\left(\frac{v_1^2}{g} - \frac{gt_1^2}{4}\right).$$

c) Khi $h = v_1t_3 - \frac{1}{2}gt_3^2 = 0$. Từ đây suy ra : $t_3 = \frac{2v}{g}$

Tương tự tính cho t_4: $h = v_2(t_4 - t_1) - \frac{1}{2}g(t_4 - t_1)^2 = 0$,

từ đây $t_4 = \frac{2v_2}{g} + t_1$.

Rõ ràng khi $v_1 = v_2$, thì thời gian bay của hai vật bằng nhau.

Thật vậy, khi đó : $t_4 - t_1 = t_3 = \frac{2v_1}{g}$.

1.38.

a) Các phương trình chuyển động : $x = v_0t\cos\beta$; $y = v_0t\sin\beta - \frac{1}{2}gt^2$

Khoảng cách của viên đạn đến súng cối :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(v_0t\cos\beta)^2 + (v_0t\sin\beta - \frac{1}{2}gt^2)^2}$$

$$= \frac{t}{2}\sqrt{g^2t^2 + 4v_0^2 - 4v_0^2gt\sin\beta}$$

b) Tìm khoảng cách R

Phương trình quỹ đạo (parapôn) : $y = x\text{tg}\,\beta - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\beta}$

Phương trình đường thẳng (sườn đồi) : $y = x\text{tg}\alpha$

A và B là hai điểm cắt nhau của các hàm trên, vậy trừ các vế của chúng cho nhau ta được:

$$x(tg\alpha - tg\beta + \frac{gx}{2v_0^2 \cos^2 \beta}) = 0.$$

Phương trình có hai nghiệm, nghiệm x = 0 ứng với điểm A và nghiệm thứ hai ứng với điểm B:

$$x = \frac{2v_0^2 \cos^2 \beta}{g}(tg\beta - tg\alpha) = \frac{2v_0^2 \sin(\beta - \alpha)\cos\beta}{g\cos\alpha}$$

Lẽ đương nhiên tại điểm B ta có hệ thức:

$$y = xtg\alpha = \frac{2v_0^2 \sin(\beta - \alpha)tg\alpha \cos\beta}{g\cos\alpha}$$

Khoảng cách AB = R = x/cosα. Do đó : $R = \frac{2v_0^2 \sin(\beta - \alpha)\cos\beta}{g\cos^2\alpha}$.

Tìm giá trị cực đại của R phụ thuộc vào góc β:

$$\frac{dR}{d\beta} = \frac{2v_0^2}{g\cos^2\alpha}[\cos(\beta-\alpha)\cos\beta - \sin((\beta-\alpha)\sin\beta]$$

$$= -\frac{2v_0^2}{g\cos^2\alpha}\cos(2\beta - \alpha) = 0$$

Từ đây $\cos(2\beta-\alpha) = 0$, tức $2\beta - \alpha = \frac{\pi}{2}$,

vậy $\beta = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\alpha$

Như vậy, khi góc α cho trước muốn đạt được tầm xa cực đại người ta phải đặt súng cối nghiêng dưới một góc β xác định như trên. Thay góc này vào biểu thức của R và sau vài phép biến đổi đơn giản ta được:

$$R_{max} = \frac{2v_0^2 \sin\left(-\alpha + \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)}{g\cos^2\alpha} = \frac{v_0^2}{g(1 + \sin\alpha)}$$

Khi $\alpha \to 0$, tức $\beta \to \frac{\pi}{4}$, công thức trên của R_{max} chuyển về công thức tầm xa cực đại của chiếu xiên với vận tốc ban đầu v_o:

$$R = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\beta = \frac{v_0^2}{g}.$$

1.39.

a) Tọa độ (x, y) của điểm A phụ thuộc vào thời gian t theo quy luật :

$$x = bt; \quad y = -ct^2$$

Loại trừ tham số t ta được phương trình quỹ đạo dạng parabôn :

$$y = -c\,\frac{x^2}{b^2}.$$

b) Lấy đạo hàm của $\vec{r}$ theo t, ta có:

$$\vec{v} = \vec{r} = b\,\vec{i} - 2ct\,\vec{j}$$

$$\vec{a} = \vec{r} = -2c\,\vec{j}$$

Độ dài của véc tơ vận tốc $\vec{v}$ và vec tơ gia tốc $\vec{a}$ tương ứng là:

$$v = \sqrt{b^2 + 4c^2t^2}, \qquad a = 2c.$$

c) Vì véc–tơ $\vec{a}$ song song với trục Oy: $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{v_x}{v_y} = \dfrac{b}{2ct}$

d) $$v_{tb} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = b\,\vec{i} - ct\,\vec{j}$$

Độ dài của véc tơ vận tốc trung bình tương ứng là :

$$v_{tb} = \sqrt{b^2 + c^2t^2}.$$

1.40.

a) Từ điều kiện $a_t = a_n$, ta có: $\quad v = \dfrac{v^2}{R}$

Tích phân phương trình $\dfrac{dv}{v^2} = \dfrac{dt}{R}$ với điều kiện ban đầu t = 0, $v = v_0$ ta

được $\dfrac{1}{v} - \dfrac{1}{v_0} = \dfrac{t}{R}$ hay v phụ thuộc vào thời gian theo định luật:

$$v = \frac{v_0}{\left(1 + \dfrac{v_0 t}{R}\right)}$$

Chú ý rằng ds = vdt, do đó : $ds = -R\dfrac{dv}{v}$

Tích phân phương trình này, ta tìm được : $\frac{s}{R} = -(\ln v - \ln v_0)$,

hay v phụ thuộc vào quãng đường s theo định luật : $v = v_0 e^{-S/R}$.

b) $$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = a_n\sqrt{2},$$

$$a = \frac{v^2}{R}\sqrt{2} = \frac{v_0^2}{R} e^{\frac{-2S}{R}}\sqrt{2}$$

1.41.

a) Phương trình tham số mô tả sự phụ thuộc tọa độ x, y của hạt vào thời gian t nhận được bằng cách lấy tích phân phương trình sau :

$$x = \int_0^t v_x dt = bt,$$

$$y = \int_0^t v_y dt = c\int_0^t x dt = bc\frac{t^2}{2}.$$

Phương tình quỹ đạo của hạt : $y = \frac{cx^2}{2b}$

b) Bán kính cong của quỹ đạo : $\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v^2}{\sqrt{a^2 - a_t^2}}$

Mođun vec–tơ gia tốc là : $a = bc$

Mođun vec–tơ vận tốc là : $v = \sqrt{b^2 + c^2x^2}$

Vì mođun vec–tơ gia tốc tiếp tuyến $a_t = v$, nên : $\rho = \frac{b}{c}\left(1 + \frac{c^2x^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}$.

1.42.

a) $v = \frac{ds}{dt} = cs_0 \exp(ct)$,

b) $a_t = \frac{d^2s}{dt^2} = c^2s_0\exp(ct)$,

c) $a_n = a_t \operatorname{tg}\varphi = c^2s_0\exp(ct)\operatorname{tg}\varphi$,

d) Bởi vì $\rho = \frac{v^2}{a_n}$, nên $\rho = \frac{c^2s_0^2(\exp(ct))^2}{c^2s_0\exp(ct)\operatorname{tg}\varphi} = s_0\exp(ct)\operatorname{ctg}\varphi = s\operatorname{ctg}\varphi$.

1.43.

a) Từ tính chất đạo hàm của véc tơ có độ dài không đổi sẽ là một véc–tơ vuông góc tới nó, ta suy ra các kết quả phải tìm trên. Thật vậy, ta có thể viết:

$$\vec{r}\frac{d\vec{r}}{dq} = \frac{1}{2}\frac{d}{dq}(\vec{r}.\vec{r}) = \frac{1}{2}\frac{d}{dq}(r)^2 = 0,$$

Vậy : $r = \left|\vec{r}\right| = \text{const}.$

b) Mặt khác, vì $\vec{r} \perp \frac{d\vec{r}}{dq}$, nên tích $\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dq} = 0$ chỉ có thể tồn tại khi $\frac{d\vec{r}}{dq} = 0$, tức $\vec{r}$ phải là một véc tơ không đổi : $\vec{r} = \text{const}$.

1.44.

a) $v = \dot{s} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ lấy đạo hàm x và y ta nhận được : $\dot{s} = b\omega$

Tích phân phương trình $ds = b\omega dt$ ta được: $s = b\omega\tau$.

b) Góc α giữa hai véc-tơ $\vec{v}$ và $\vec{a}$ có thể xác định từ công thức :

$$\cos\alpha = \frac{(\vec{v}, \vec{a})}{v.a}$$

Dễ thấy rằng tích vô hướng : $(\vec{v}, \vec{a}) = v_x a_x + v_y a_y = 0$

Do đó $\cos\alpha = 0$ hay $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

1.45. Cộng hai phương trình với nhau ta được :

$$x + y = 2be^{ct}, \quad \text{do đó} \quad e^{ct} = \frac{x + y}{2b}.$$

Thay vào phương trình đầu ta được phương trình quỹ đạo

$$\frac{x^2}{4b^2} - \frac{y^2}{4b^2} = 1$$

Đây là phương trình hypecbôn. Hạt sẽ chuyển động một trong hai nhánh của đường cong này. Bình phương vận tốc:

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2b^2c^2(e^{2ct} + e^{-2ct})$$

Gia tốc hướng tâm $a_{ht} = \frac{v^2}{\rho}$

Ở đây $\rho = \frac{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}\right|}$ là bán kính đường cong của quỹ đạo.

Do đó: $a_{ht} = \dfrac{2bc^2\sqrt{2}}{\sqrt{e^{2ct} + e^{-2ct}}}$

Giá trị cực đại của gia tốc hướng tâm xác định từ điều kiện $\dfrac{da_{ht}}{dt} = 0$;

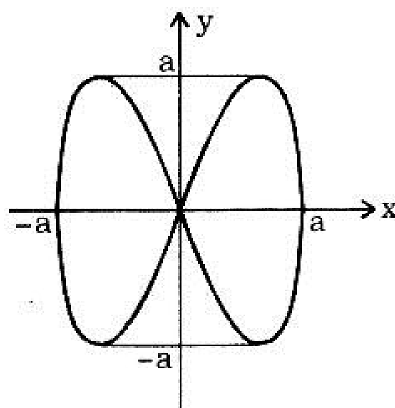
tức: $e^{2ct} - e^{-2ct} = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 0$

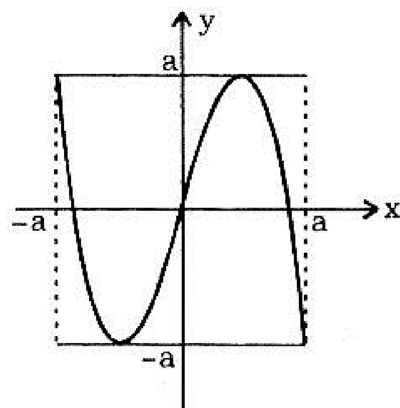
Dễ thấy rằng, khi t = 0 bán kính cong của quỹ đạo là nhỏ nhất, nhưng lúc đó vận tốc của vật là cực tiểu. Vậy cần phải kiểm tra xem tại điểm này gia tốc hướng tâm đạt giá trị cực đại hay cực tiểu.

Tính đạo hàm bậc hai ta được $\left.\dfrac{d^2a_{ht}}{dt^2}\right|_{t=0} < 0$, và như vậy tại t = 0 gia tốc hướng tâm đạt giá trị cực đại và bằng $a_d = 2bc^2$.

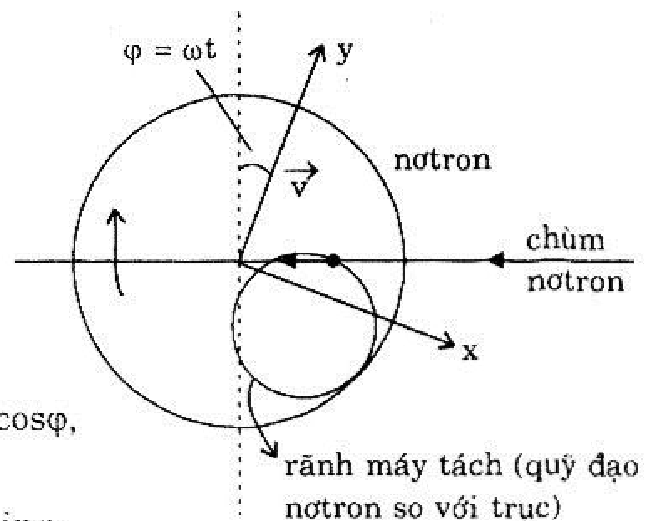
1.46. a) $y^2 = 4x^2\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right)$, $|x| \le a,\ |y| \le a$

b) $y = x\left(3 - 4\dfrac{x^2}{a^2}\right)$, $|x| \le a,\ |y| \le a$





1.47. Ta chọn hệ tọa độ chuyển động quay với trục và gốc của hệ nằm trên trục quay của máy tách. Trong hệ này phương trình mô tả dạng rãnh đồng nhất với phương trình quỹ đạo nơtron. Ta thấy tại thời điểm t các tọa độ nơtron bằng:

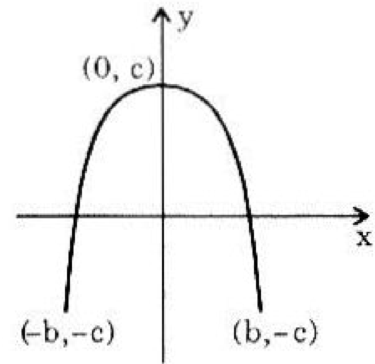


$x = (R - vt)\cos\omega t = (R - \dfrac{v}{\omega}\varphi)\cos\varphi,$

$y = (R - vt)\sin\omega t = (R - \dfrac{v}{\omega}\varphi)\sin\varphi.$

Đây chính là các phương trình tham số của rãnh máy tách.

1.48. Sử dụng công thức $\cos 2\omega t = \cos^2\omega t - \sin^2\omega t$ ta dễ dàng tìm được phương trình quỹ đạo. Đó là một đoạn parabôn có phương trình $y = c - \frac{2c}{b^2}x^2$ bị giới hạn trong vùng $|x| \le b$ và $|y| \le c$. Vật dao động trong cung parabôn (vẽ ra hình Lissajous) giữa các điểm quay (b, –c) và (–b, –c).



Điểm (0, c) đạt được khi $\omega t = n\pi$

Điểm (b, –c) đạt được khi $\omega t = (4n + 1)\ \pi/2$

Điểm (–b, –c) đạt được khi $\omega t = (4n + 3)\ \pi/2$ trong đó n = 0, 1, 2 ...

Để khảo sát sự thay đổi giá trị vận tốc của vật, ta tính v^2:

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \omega^2(16c^2\sin^2\omega t + b^2)\cos^2\omega t$$

Điều kiện để vận tốc đạt cực đại là :

$$\frac{d}{dt}(v^2) = 0 \text{ hay là } \omega^3(16c^2\cos 2\omega t - b^2)\sin 2\omega t = 0$$

Từ đây suy ra hoặc $\sin 2\omega t = 0$ tức là khi $\omega t = \frac{n\pi}{2}$;

hoặc $\cos 2\omega t = \left(\frac{b}{4c}\right)^2$, tức khi $\omega t = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{b}{4c}\right)^2 + n\pi$

Điều kiện thứ hai chỉ tồn tại khi các biên độ b và c thoả mãn hệ thức 4c > b. Như vậy, trên cung parabôn xuất hiện 5 điểm khác nhau (ba điểm xác định bởi điều kiện thứ nhất và hai điểm bởi điều kiện thứ hai) tại đấy vận tốc nhận các cực trị. Tại điểm quay (ωt là bội lần lẻ của $\pi/2$) vận tốc v = 0; tại điểm (0,c) vận tốc $v = \omega b$, trái lại tại điểm $\omega t = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{b}{4c}\right)^2 + n\pi$ vận tốc đạt giá trị lớn nhất bằng:

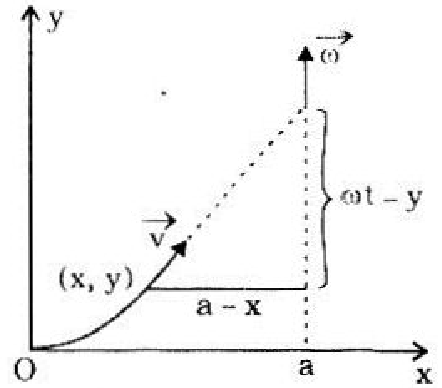
$$v = 2\omega c\left[1 + \left(\frac{b}{4c}\right)^2\right]$$

Nếu $4c \le b$, thì vận tốc đạt giá trị cực trị chỉ đối với $\omega t = \frac{n\pi}{2}$. Trong trường hợp này tại điểm (0, c) vận tốc sẽ lớn nhất.

Gia tốc của vật : $a = \left(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2\right)^{\frac{1}{2}} = \omega^2\left(b^2\sin^2\omega t + 16c^2\cos^2 2\omega t\right)^{\frac{1}{2}}$.

Tại các điểm quay gia tốc đạt giá trị $a = 4c\omega^2\sqrt{1 + \left(\frac{b}{4c}\right)^2}$.

1.49. Ta chọn hệ tọa độ như trên hình. Tại thời điểm t = 0 chó đứng ở gốc hệ tọa độ, còn trục x hướng vuông góc đến quỹ đạo của thỏ và thỏ đứng ở điểm cắt trục đó tại a.



Từ hình vẽ ta có :

$$(a-x)\frac{dy}{dx} = wt - y \qquad (1)$$

Cần loại trừ thời gian khỏi phương trình này. Để làm điều đó, ta chú ý rằng $v = \frac{ds}{dt}$, ở đây s đoạn đường chó đã chạy được.

Vì $\qquad (ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$

Vậy: $\qquad dt = \frac{1}{v}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$

Đạo hàm phương trình (1) theo x ta được

$$(a-x)\frac{d^2y}{dx^2} = w\frac{dt}{dx}.$$

Vậy kết hợp với phương trình trên ta thu được:

$$(a-x)\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{v}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Để giải phương trình này ta nên đặt $\frac{dy}{dx} = z$, khi đó ta có:

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = c\frac{dx}{a-x}$$

ở đây tỷ số $\frac{w}{v}$ kí hiệu bằng c.

Tại thời điểm ban đầu t = 0, thì x = 0 và $\frac{dy}{dx} = z = 0$,

do đó: $\qquad \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \int_0^x \frac{dx}{a-x}$

từ đây suy ra :

$$\ln(z+\sqrt{1+z^2}) = -c\ln\left(\frac{a-x}{a}\right)$$

Vậy : $z = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a-x}\right)^{c} - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a-x}\right)^{-c}$

Thực hiện tích phân đơn giản ta đi đến kết quả

$$y = \frac{1}{2}\left[\frac{a^{-c}}{1+c}(a-x)^{1+c} - \frac{a^{c}}{1-c}(a-x)^{1-c}\right] + \frac{ac}{1-c^2}$$

Chó đuổi kịp thỏ nếu y(a) là đại lượng hữu hạn. Trường hợp này có thể xảy ra chỉ khi $1 - c > 0$, tức khi $v > w$. Trong trường hợp ngược lại số hạng thứ hai trong ngoặc vuông phải tiến đến vô cùng với $x \to a$.

Thỏ chạy một khoảng đường $y(a) = \frac{ac}{1-c^2} = 90$m trong thời gian $t = \frac{y(a)}{w}$. Cũng trong khoảng thời gian này chó chạy được một khoảng đường :

$$s = vt = \frac{a}{1-c^2} = 100\text{m}.$$

1.50.

a) Khoảng thời gian từ thời điểm t = 0 đến lúc dừng lại t_0 xác định từ điều kiện vận tốc góc tức thời $w(t_0) = \varphi|_{t0} = 0$ tức là:

$$w|_{t_0} = 0 = a - 3t_0^2b, \text{ hay } t_0^2 = \frac{a}{3b}.$$

Giá trị trung bình của vận tốc góc trong khoảng thời gian t_0:

$$\omega_{tb} = \frac{\varphi(t_0)}{t_0} = a - bt_0^2 \quad \text{hay là} \quad \omega_{tb} = \frac{2a}{3} = 4\text{rad/s}.$$

Giá trị trung bình của gia tốc góc trong khoảng thời gian t_0

$$\varepsilon_{tb} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega|_{t0} - \omega|_{t=0}}{t_0} = -3bt_0$$

hay là $\varepsilon_{tb} = -\sqrt{3ab} = 6$ rad/s^2.

b) Gia tốc góc lúc dừng lại :

$$\varepsilon|_{t_0} = \omega\Big|_{t_0} = -6\ bt_0$$

hay là $\varepsilon|_{t_0} = -2\sqrt{3ab} = 12$ rad/s^2

1.51. *Hệ tọa độ Đề các* | *Hệ tọa độ cực*

a) Chuyển động

$$v_x = v_0\cos\omega t + v_0 t\omega\cos\left(\frac{\pi}{2} + \omega t\right) = v_0\cos\omega t - v_0 t\omega\sin\omega\tau,$$

$$v_y = v_0\sin\omega t + v_0 t\omega\sin\left(\frac{\pi}{2} + \omega t\right), = v_0\sin\omega t + v_0 t\omega\cos\omega t$$

$$x = v_0 t\cos\omega t,$$

$$1y = v_0 t\sin\omega t,$$

Hệ tọa độ cực:

$$r = v_0,$$

$$\varphi = \omega$$

$$r = v_0 t,$$

$$\varphi = \omega t$$

Quỹ đạo

$$\frac{x}{y} = tg\left(\frac{\omega}{v_0}\sqrt{x_2 + y^2}\right)$$

$$r = \frac{v_0}{\omega}\varphi$$

Dễ dàng kiểm tra được rằng nếu thay $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ vào công thức diễn tả quỹ đạo trong hệ tọa độ đề các thì ta được phương trình quỹ đạo trong tọa độ cực. Quỹ đạo là đường xoắn ốc Archimedes.

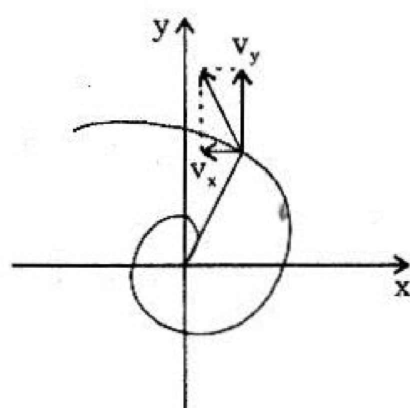
b) Vận tốc

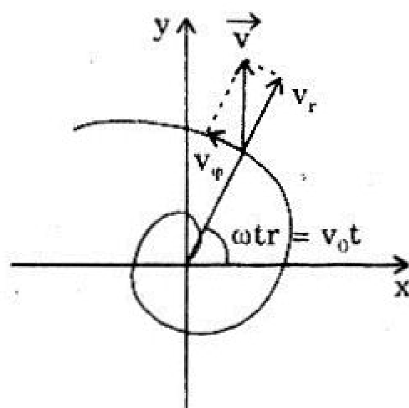
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + v_0^2\omega^2 t^2} = v_0\sqrt{1 + \omega^2 t^2}$$

$$v_r = \dot{r} = v_0$$

$$v_\varphi = r\dot{\varphi} = v_0\omega t$$

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} = v_0\sqrt{1 + \omega^2 t^2}$$





c) Gia tốc

$$a_x = \ddot{x} = -v_0\omega(2\sin\omega t + \omega t\cos\omega t)$$

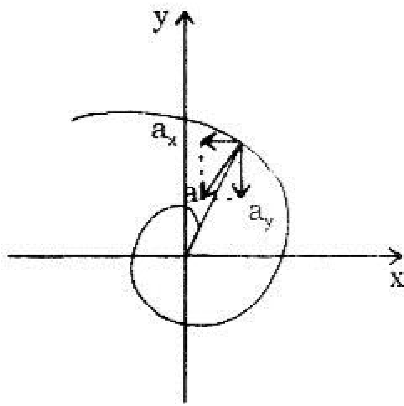
$$a_y = \ddot{y} = v_0\omega(2\cos\omega t - \omega t\sin\omega t)$$

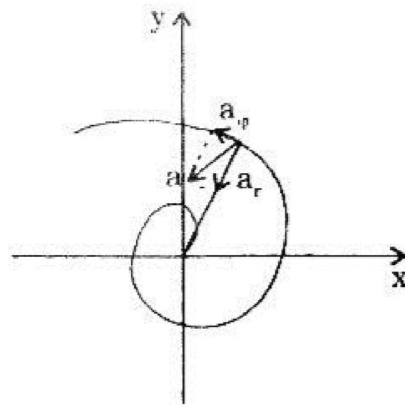
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = v_0\omega\sqrt{4 + \omega^2 t^2}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -v_0 t\omega^2$$

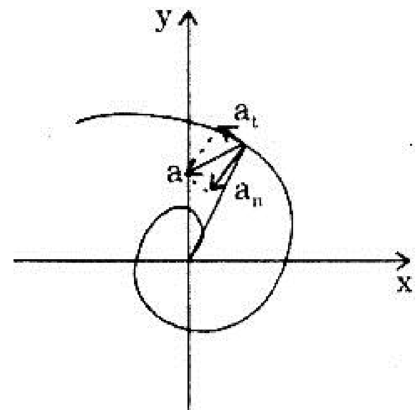
$$a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 2v_0\omega$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + + a_\varphi^2} = v_0\omega\sqrt{4 + \omega^2 t^2}$$





$$a_t = v = v_0 \frac{\omega^2 t}{\sqrt{1+\omega^2 t^2}}$$



Từ đây có thể tìm được a_n.

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \frac{v_0\omega\left(2+\omega^2 t^2\right)}{\sqrt{1+\omega^2 t^2}}.$$

d) Bán kính cong ρ :

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v_0\left(1+\omega^2 t^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\omega\left(2+\omega^2 t^2\right)}.$$

Giá trị của bán kính cong diễn tả theo φ

$$\rho = \frac{v_0}{\omega}\frac{\left(1+\varphi^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\omega\left(2+\varphi^2\right)}.$$

e) Chiều dài toàn khoảng đường trong hệ tọa độ không chuyển động mà bọ dừa đã trải qua.

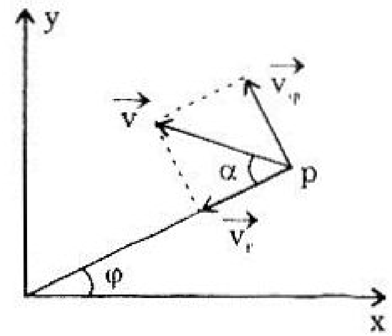
$$S = \int_0^T v\,dt = \int_0^T \sqrt{x^2+y^2}\,dt, \qquad \text{vì } T = \frac{R}{v_0}$$

do đó : $$S = \int_0^{\frac{R}{v_0}} v_0\sqrt{1+\omega^2 t^2}\,dt = v_0\omega\int_0^{\frac{R}{v_0}}\sqrt{t^2+\frac{1}{\omega^2}}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}v_0\omega\left[t\sqrt{\frac{1}{\omega^2}+t^2}+\frac{1}{\omega^2}\operatorname{arcsin h}\omega t\right]_0^{\frac{R}{v_0}}$$

$$= \frac{1}{2}v_0\left(\frac{R}{v_0}\sqrt{1+\frac{\omega^2 R^2}{v_0^2}}+\frac{1}{\omega^2}\operatorname{arcsin h}\left(\frac{\omega R}{v_0}\right)\right).$$

1.52.



a) Theo hình, $\alpha < \dfrac{\pi}{2}$

$$\frac{v_r}{v_\varphi} = \text{cotg}\alpha$$

Bởi vì r giảm, vậy $r < 0$ và $v_r = -r$

Đưa v_r vào đẳng thức ta được: $r = -v_\varphi \text{cotg}\alpha = -r_\varphi \text{cotg}\alpha$

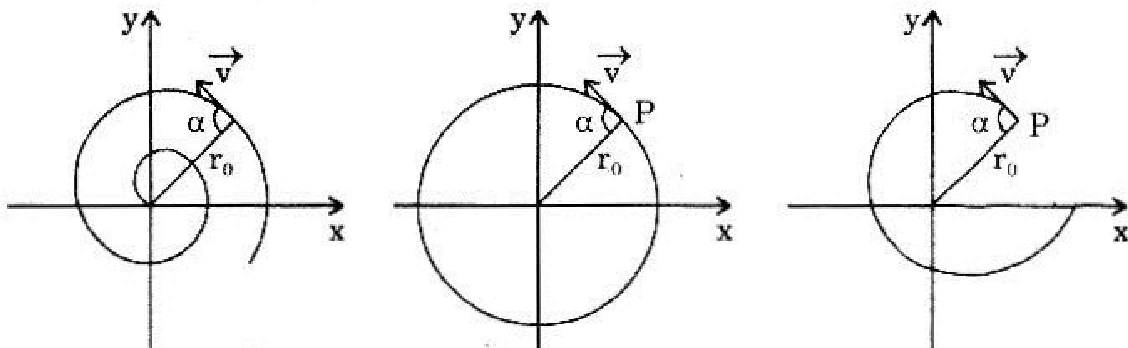
$$\frac{\dot{r}}{r} = -\dot{\varphi}\,\text{ctg}\alpha\,.$$

Tích phân cả hai vế của phương trình theo thời gian:

$$\ln r = A - \varphi \text{ctg}\alpha,\ \ln r(0) = A = \ln r_0$$

Từ đây $r(\varphi) = r_0 e^{-\varphi \text{ctg}\alpha}$

Quỹ đạo của điểm có dạng đường xoắn ốc logarit (hình).



b) Ký hiệu $\text{ctg}\alpha = a > 0$ ta có $r = r_0 e^{-a\varphi}$ Chiều dài của quỹ đạo, tức khoảng đường:

$$s = \int_0^t v\,dt = \int_0^t \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2}\,dt$$

đặt $v_r = -r$, $v_\varphi = r_\varphi$, ta được :

$$s = \int_0^t \sqrt{r_0^2 e^{-2a\varphi} a^2 \varphi^2 + \gamma_0^2 e^{-2a\varphi} \dot{\varphi}^2}\,dt = r_0\sqrt{1+a^2}\int_0^t e^{-a\varphi}\dot{\varphi}\,dt$$

$$= r_0\sqrt{1+a^2}\int_0^\infty e^{-a\varphi}d\varphi = r_0\sqrt{1+a^2}\left.\frac{e^{-a\varphi}}{-a}\right|_0^\infty = r_0\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}$$

Thay trở lại $a = \text{ctg}\alpha$, ta thu được : $s = r_0\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha} = \dfrac{r_0}{\cos\alpha}$.

- Trong trường hợp, khi $\alpha < \frac{\pi}{2}$, tức ctg$\alpha > 0$, ta có chuyển động hữu hạn theo đường cong xoắn ốc logarit.

- Trong trường hợp, khi $\alpha = \frac{\pi}{2}$ tức ctg = 0, đường cong quỹ đạo chuyển về dạng $r = r_0$. Trong trường hợp này việc tính độ dài toàn phần của quỹ đạo trở thành vô nghĩa, bởi vì vật chuyển động dài vô hạn theo vòng tròn.

- Trong trường hợp, khi $\alpha > \frac{\pi}{2}$, tức ctg$\alpha < 0$, khi đó chất điểm chuyển động theo hướng xoắn ốc logarit nhưng khoảng cách của nó đến gốc hệ tọa độ tăng dần. Trong trường hợp này chiều dài quỹ đạo cũng như thời gian chuyển động là vô hạn và không cần phải giải câu hỏi b) của bài toán.

1.51.

a) $\varphi = \frac{ct}{1-ct}$, từ đây $ct = \frac{\varphi}{\varphi+1}$ và cuối cùng $r = r_0\left(1 - \frac{\varphi}{\varphi+1}\right) = \frac{r_0}{\varphi+1}$.

Quỹ đạo của điểm là đường xoắn ốc hypecbol, đường tiệm cận của nó tạo thành góc $\pi - 1$ với chiều dương của trục nằm ngang.

b) $$v_r = -cr_0,\ v_\varphi = \frac{r_0c}{1-ct}$$

$$v = \frac{r_0c}{1-ct}\sqrt{2-2ct+c^2t^2} = r_0c\sqrt{1+\left(\frac{r_0}{r}\right)^2} = c\,\frac{r_0}{r}\sqrt{r^2+r_0^2}.$$

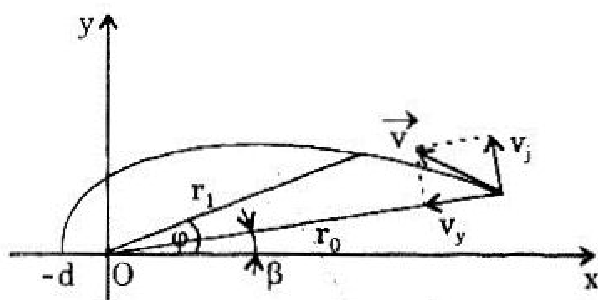
c) $$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -r\,\frac{c^2}{(1-ct)^4} = -\frac{c^2r_0}{r},$$

$$a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = -2cr_0\,\frac{c}{(1-ct)^2} + \frac{2c^2r}{(1-ct)^3} = 0$$

$$a = \frac{c^2r_0^4}{r^3}.$$

Vì luôn luôn thoả mãn điều kiện $r \geq 0$, vậy trong trường hợp khi $c > 0$ thời gian chuyển động là hữu hạn và bằng $T = \frac{1}{c}$. Khi đó điểm chuyển động theo đường xoắn ốc và khoảng cách của nó đến gốc tọa độ giảm tuyến tính theo thời gian. Trong trường hợp $c < 0$ thời gian chuyển động không phải hữu hạn và khoảng cách của điểm tới gốc tọa độ đường xoắn ốc tăng không ngừng.

1.52. Ký hiệu vận tốc âm bằng c, vận tốc máy bay v. Khoảng cách máy bay đến gốc hệ tọa độ phải giảm để sao cho âm thanh truyền từ điểm r_0 đến đồng thời với âm thanh truyền từ r_1 (hình), hay là:



$$v_r = -\dot{r} = c$$

từ đấy $\quad r(t) = r_0 - ct$

Bởi vì : $\quad v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} = \text{const}$

Vậy : $\quad v_\varphi = \text{const}$

Do đó : $\quad tg\alpha = \dfrac{v_\varphi}{v_r} = \dfrac{r\dot{\varphi}}{-\dot{r}} = \dfrac{r\dot{\varphi}}{c}$,

$$\dot{\varphi} = \frac{ctg\alpha}{r}$$

Thay $r = r_0 - ct$, ta được : $\dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{ctg\alpha}{r_0 - ct}$, hay là $d\varphi = \dfrac{tg\alpha}{\dfrac{r_0}{c} - t} dt$

Lấy tích phân ta được : $\quad \varphi = -tg\alpha \ln A\left(\dfrac{r_0}{c} - t\right) = -tg\alpha \ln(rB)$,

ở đây A là hằng số tích phân và $B = \dfrac{A}{c}$.

Cuối cùng $\quad r = \dfrac{1}{B} e^{-\varphi ctg\alpha}$

Từ các điều kiện ban đầu $r(0) = r_0$ và $\varphi(0) = 0$ suy ra $\dfrac{1}{B} = r_0$

Đưa $ctg\alpha = \dfrac{c}{v_\varphi} = \dfrac{c}{\sqrt{v^2 - v_r^2}} = \dfrac{c}{\sqrt{v^2 - c^2}}$ vào công thức của r ta thu được dạng cuối cùng của phương trình quỹ đạo

$$r(\varphi) = r_0 e^{\frac{-c\varphi}{\sqrt{v^2 - c^2}}}$$

Vậy quỹ đạo của máy bay là một đường xoắn ốc logarit. Từ tính toán cho thấy phi công phải lao máy bay xuống đường băng tại vị trí cách nơi các bạn của mình đứng một khoảng :

$$d = r_0 e^{\frac{-c(\pi - \beta)}{\sqrt{v^2 - c^2}}}.$$

1.53. Có thể tìm được vận tốc góc và gia tốc góc tức thời bằng cách lấy đạo hàm φ :

$$\varphi = \omega = 2bt, \qquad \varepsilon = \varphi = 2b.$$

Sử dụng biểu thức cho thành phần gia tốc tiếp tuyến và pháp tuyến :

$$a_t = R.\varepsilon, \qquad a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R .$$

Ta sẽ nhận được định luật phụ thuộc vào thời gian của gia tốc toàn phần a :

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \frac{v}{t}\sqrt{1 + 4b^2t^4} .$$

Vậy tại thời điểm t = 2,5s, gia tốc đó bằng :

$$a\Big|_{t=2,5s} = \frac{v}{t}\sqrt{1 + 4b^2t^4}\Big|_{t=2,5s} = 0,7\text{m/s}^2.$$

1.54. Vì: $v_r = r = a.e^{kt}$, $v_\varphi = r\dot{\varphi} = br$, cho nên nếu tích phân phương trình đó ta được :

$$r = \int a.e^{kt}dt = \frac{a}{k}e^{kt} + c_1$$

$$\varphi = \int bdt = bt + c_2$$

Hằng số tích phân c_1, c_2 được tìm từ diều kiện chất điểm bắt đầu chuyển động từ gốc tọa độ (r = 0, φ = 0, khi t = 0). Do đó:

$$r = \frac{a}{k}(e^{kt} - 1)$$

$$\varphi = bt.$$

Phương trình quỹ đạo của chất điểm : $r = \dfrac{a}{k}\left(e^{\frac{k}{b}\varphi} - 1\right)$

Đó là đường xoắn ốc lôgarit.

1.55. Nếu biểu thị góc giữa véctơ $\vec{\tau}$ và $\vec{b}$ là α thì :

$$a_t = b.\cos\alpha = b\,\frac{v_x}{v}$$

mặt khác, vì $a_t = v$ và $v_x = x$, do đó : $dv = b\dfrac{dx}{v}$.

Tích phân phương trình này với điều kiện ban đầu v = 0 khi x = 0 ta được $v^2 = 2bx$ hay $v = \sqrt{2bx}$.

1.56. Giả thiết rằng vòng tròn lăn dọc theo trục x của hệ tọa độ, còn tại thời điểm ban đầu t = 0 điểm khảo sát nằm ở gốc hệ tọa độ.

a) Phương trình chuyển động :

$$x = vt - R\sin\frac{v}{R}t, \qquad y = R\left(1 - \cos\frac{v}{R}t\right).$$

Phương trình quỹ đạo:

$$x = R.\arccos\left(1 - \frac{y}{R}\right) - \sqrt{2yR - R^2}$$

Đây là phương trình đường cong xycloid.

b) Khoảng đường s của điểm khảo sát :

$$s = \int_0^T v(t)dt = \int_0^{\frac{2\pi R}{v}} \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{\frac{1}{2}} dt = 2v\int_0^{\frac{2\pi R}{v}} \sin\frac{v}{2R}t$$

$$= -4R.\cos\frac{v}{2R}t\Big|_0^{\frac{2\pi R}{v}} = 8R.$$

c) Giá trị của gia tốc : $a = \omega^2 R = \dfrac{v^2}{R}$.

1.57. Các phương trình : $x_0 = R\varphi$, $y_0 = R$ mô tả chuyển động của tâm đĩa, ở đây x_0, y_0 là tọa độ của tâm đĩa, và φ là góc cực. Ta tìm sự phụ thuộc của góc φ vào thời gian. Trong khoảng $0 < \varphi < 2\pi$, $v = 2R\dot{\varphi}\sin\dfrac{\varphi}{2}$

Từ đây: $$\frac{vdt}{2R} = \sin\frac{\varphi}{2}.d\varphi$$

Tích phân phương trình trên ta được : $\dfrac{vt}{2R} = -2\cos\dfrac{\varphi}{2} + C$

ở đây C là hằng số tích phân. Do đó :

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{C}{2} - \frac{vt}{4R} \quad \text{hay là} \quad \varphi = 2\arccos\left(\frac{C}{2} - \frac{vt}{4R}\right)$$

Hằng số C xác định từ điều kiện ban đầu $\varphi = \pi$ khi $t = \dfrac{4R}{v}$:

$$C = 2 + 2\cos\frac{\pi}{2} = 2$$

Cuối cùng: $x_0 = 2R\arccos\left(1 - \dfrac{vt}{4R}\right)$;

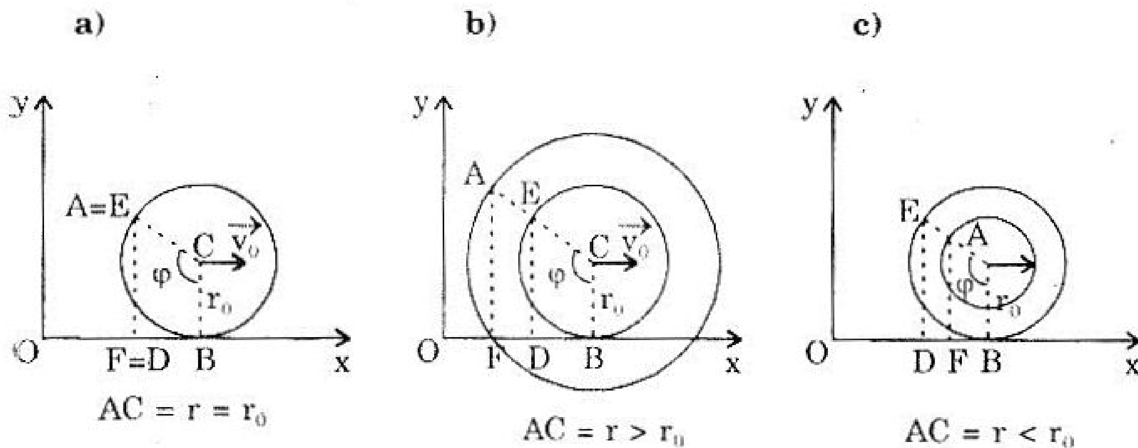
$y = R$.

1.58. Theo hình khoảng cách của điểm trên mặt cầu đến trục quay OO' bằng $r = R\sin\theta$. Có thể xảy ra ba trường hợp:

Nếu $\cos\theta = \frac{d}{R}$, thì $\sin\theta = \sqrt{R^2 - \frac{d^2}{R}}$ và khi đó $r = \sqrt{R^2 - d^2} = r_0$ (điểm nằm trên vòng tròn lăn theo mặt thành) (hình a)

Nếu $\cos\theta < \frac{d}{R}$, khi đó $r = R\sin\theta > r_0$ (hình b)

Nếu $\cos\theta > \frac{d}{R}$, khi đó $r = R\sin\theta < r_0$ (hình c)



Dùng ký hiệu $\lambda = \frac{R\sin\theta}{\sqrt{R^2 - d^2}}$ ta có thể viết khoảng cách của một điểm bất kỳ đến trục quay.

$$r = \lambda r_0 = \lambda\sqrt{R^2 - d^2}, \quad \text{ở đây} \quad 0 \le \lambda \le \frac{R}{\sqrt{R^2 - d^2}}$$

Dễ thấy rằng ba trường hợp nói trên ứng với các giá trị $\lambda = 1$, $\lambda > 1$ và $\lambda < 1$.

a) Ta hãy tìm các phương trình chuyển động cho điểm A mà tại thời điểm $t = 0$ tọa độ của nó bằng $x = 0$, $y = r_0 - r$. Theo các ký hiệu như trên các hình vẽ và nội dung bài toán ta có:

$$\varphi = \omega t = \frac{v_0}{r_0}t = \frac{v_0 t}{\sqrt{R^2 - d^2}}$$

$$x = OF = OB - BF$$

với $OB = EB = r_0$, $\varphi = v_0 t$,

$$BF = AC\sin\varphi = \lambda r_0 \sin\varphi = \lambda\sqrt{R^2 - d^2}\sin\frac{v_0 t}{\sqrt{R^2 - d^2}}$$

Vậy : $x = r_0(\varphi - \lambda\sin\varphi) = \sqrt{R^2 - d^2}\left(\frac{v_0t}{\sqrt{R^2 - d^2}} - \lambda\sin\frac{v_0t}{\sqrt{R^2 - d^2}}\right)$

Tương tự :

$$y = AF = BC - AC\cos\varphi$$

$$= r_0(1 - \lambda\cos\varphi) = \sqrt{R^2 - d^2}\left(1 - \lambda\cos\frac{v_0t}{\sqrt{R^2 - d^2}}\right).$$

Đây là những phương trình tổng quát cho mọi giá trị λ thoả mãn các điều kiện của bài toán.

Ta suy ra trường hợp riêng khi $\lambda = 0$, tức $\sin\theta = 0$, là điểm A nằm trên trục quay. Các phương trình chuyển động của điểm này có dạng rất đơn giản:

$$x = v_0t, \qquad y = \sqrt{R^2 - d^2}.$$

b) Xác định giá trị của φ từ phương trình của y và thay vào phương trình của x ta tìm được phương trình quỹ đạo.

$$y = r_0(1 - \lambda\cos\varphi), \quad \varphi = \arccos\frac{r_0 - y}{\lambda r_0}, \qquad \lambda \neq 0$$

$$x = r_0(\varphi - \lambda\sin\varphi) = r_0\arccos\frac{r_0 - y}{\lambda r_0} - \lambda r_0\sin\left(\arccos\frac{r_0 - y}{\lambda r_0}\right)$$

$$= r_0\arccos\frac{r_0 - y}{\lambda r_0} - \lambda r_0\sqrt{1 - \left(\frac{r_0 - y}{\lambda r_0}\right)^2}$$

$$= r_0\arccos\frac{r_0 - y}{\lambda r_0} - \sqrt{(\lambda^2 - 1)r_0^2 + 2r_0y - y^2}$$

$$= \sqrt{R^2 - d^2}\arccos\frac{\sqrt{R^2 - d^2} - y}{\sqrt{R^2 - d^2}} -$$

$$- \sqrt{(\lambda^2 - 1)(R^2 - d^2) + 2y\sqrt{R^2 - d^2} - y^2}$$

Đây là phương trình tổng quát của quỹ đạo xycoid. Trong trường hợp, khi $\lambda = 1$ phương trình có dạng đơn giản hơn.

$$x = \sqrt{R^2 - d^2}\arccos\frac{\sqrt{R^2 - d^2} - y}{\sqrt{R^2 - d^2}} - \sqrt{y(2\sqrt{R^2 - d^2} - y)}$$

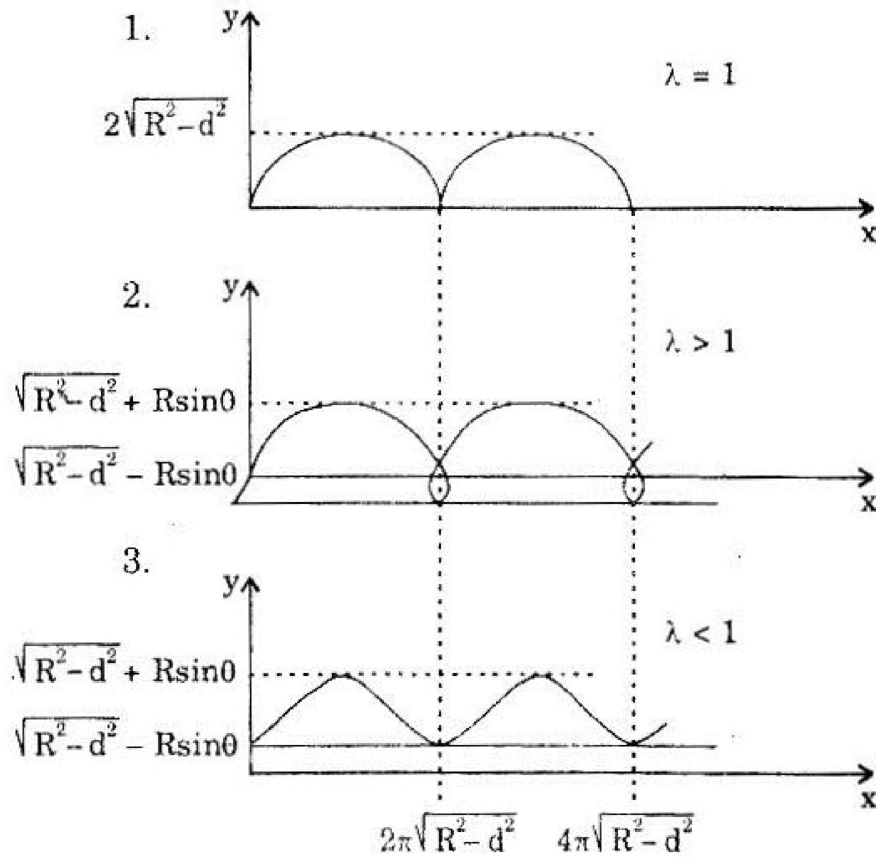
Trong trường hợp :

$\lambda = 1$ quỹ đạo của điểm A là đường cong xycloid thường,

$\lambda < 1$ quỹ đạo của điểm A là đường cong xycloid rút ngắn

$\lambda > 1$ quỹ đạo của điểm A là đường cong xycloid kéo dài.

Dạng của những quỹ đạo này diễn tả trên các hình 77a, b, c dưới. Trường hợp riêng khi $\lambda = 0$ quỹ đạo là đường thẳng có phương trình $y = \sqrt{R^2 - d^2}$.



c) Ta xác định bán kính cong ρ của quỹ đạo theo công thức :

$$\rho = \frac{\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}}{|xy - yx|} .$$

$x = r_0(\varphi - \lambda\sin\varphi)$, $\quad x = r_0\varphi(1 - \lambda\cos\varphi)$, $\quad x = \lambda r_0\varphi^2\sin\varphi$, $\varphi = 0$

$y = r_0(1 - \lambda\cos\varphi)$, $\quad y = \lambda r_0\varphi\sin\varphi$, $\quad y = \lambda r_0\varphi^2\cos\varphi$

Sau khi tính $x^2 + y^2$ và $xy - yx$ và thay vào công thức trên ta được:

$$\rho = \frac{r_0^3\varphi^3(1 + \lambda^2 - 2\lambda\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}{\lambda r_0^2\varphi^3|\cos\varphi - \lambda|} = r_0\frac{(1 + \lambda^2 - 2\lambda\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}{\lambda|\cos\varphi - \lambda|}$$

$$= \sqrt{R^2 - d^2}\;\frac{\left(1 + \lambda^2 - 2\lambda\cos\dfrac{v_0 t}{\sqrt{R^2 - d^2}}\right)^{\frac{3}{2}}}{\lambda\left|\cos\dfrac{v_0 t}{\sqrt{R^2 - d^2}} - \lambda\right|}$$

Trong trường hợp $\lambda = 0$, công thức trở nên đơn giản rất nhiều:

$$\rho = 4r_0 \sin\frac{\varphi}{2} = 4\sqrt{R^2 - d^2}\,\sin\frac{v_0 t}{2\sqrt{R^2 - d^2}}$$

Từ kết quả thu được ta thấy bán kính cong đạt giá trị cực đại khi $\varphi = (2n - 1)\pi$, tức đối với

$$x = (2n - 1)\pi\sqrt{R^2 - d^2}, \qquad \text{n là số nguyên.}$$

Khi đó :

$$\rho_{max} = r_0\frac{(1+\lambda)^2}{\lambda} = \frac{(1+\lambda)^2}{\lambda}\sqrt{R^2 - d^2}.$$

Cực tiểu của bán kính cong ứng với các góc $\varphi = 2\pi n$, tức :

$$x = 2\pi n\sqrt{R^2 - d^2}$$

$$\rho_{min} = r_0\frac{(1-\lambda)^2}{\lambda} = \frac{(1-\lambda)^2}{\lambda}\sqrt{R^2 - d^2}$$

Trong trường hợp đặc biệt, $\lambda = 0$, khi chuyển động theo đường thẳng bán kính cong ρ có giá trị vô cùng.

1.59. Theo định nghĩa của vận tốc mặt $s = \frac{1}{2}r^2\varphi$, ta thay giá trị này vào biểu thức cho trong đầu bài :

$$s = \frac{1}{2}r^2\varphi = \frac{1}{2}ar, \qquad \text{từ đây} \quad \varphi = \frac{a}{r}$$

Ta xác định sự phụ thuộc của r vào thời gian :

$$v_r = \dot{r} = b, \qquad r = r_0 + bt$$

Thay biểu thức thu được vào phương trình của φ :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{a}{r_0 + bt}, \qquad \varphi - \varphi_0 = \frac{a}{b}\ln\frac{r_0 + bt}{r_0}$$

Từ đây ta xác định phương trình quỹ đạo

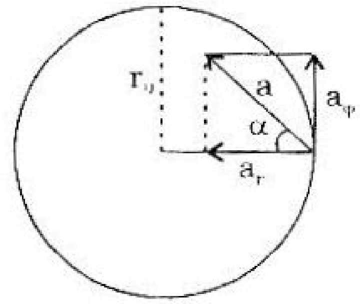
$$\varphi = \frac{a}{b}\ln\frac{r}{r_0} \qquad \text{hay là} \qquad r = r_0 e^{\frac{\varphi b}{a}}$$

Quỹ đạo của vật là đường xoắn ốc lôgarit. Phương trình chuyển động.

$$r = r_0 + bt, \qquad \varphi = \frac{a}{b}\ln\left(1 + \frac{b}{r_0}t\right)$$

Khi t tăng góc φ tăng theo và vật xa dần tâm của đường xoắn ốc.

1.60. Ta tìm phương trình chuyển động trong tọa độ cực. Theo hình, ta phân tích véc tơ gia tốc thành các thành phần :



$$a_r = r - r\varphi^2 = -r_0\varphi^2,$$

$$a_\varphi = r\varphi + 2r\varphi = r_0\varphi$$

bởi vì $\quad r(t) = r_0$

Tìm sự phụ thuộc φ (t) từ hệ thức :

$$tg\alpha = \frac{a_\varphi}{a_r} = -\frac{\varphi}{\varphi^2}$$

Kí hiệu $\varphi = u$ ta có thể viết : $\frac{u}{u^2} = tg\alpha$, do đó $\frac{1}{u} = t.tg\alpha + c$

Vì $\quad u = \frac{d\varphi}{dt} \quad$ nên $\quad d\varphi = \frac{dt}{c + ttg\alpha}$

từ đây $\quad \varphi = ctg\alpha\ln|ttg\alpha + c| + A$

Vì từ các điều kiện ban đầu :

$$\varphi(0) = c.tg\alpha\ln c + A = 0, \qquad \varphi(0) = \frac{1}{c} = \omega_0$$

nên $\quad c = \frac{1}{\omega_0} \quad$ và $\quad A = ctg\alpha\ln\omega_0.$

Thay các hàm số trên vào hàm φ(t) :

$$\varphi(t) = ctg\alpha\ln(\omega_0 t.\ tg\alpha + 1).$$

Biểu thức của φ(t) có nghĩa cho mọi t, khi :

$$t.\omega_0 tg\alpha + 1 > 0 \quad \text{hay là} \quad \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Trong trường hợp $\alpha = 0$ ta có: $\varphi = \omega$, $\varphi(t) = \omega_0 t$ tức chuyển động là chuyển động đều.

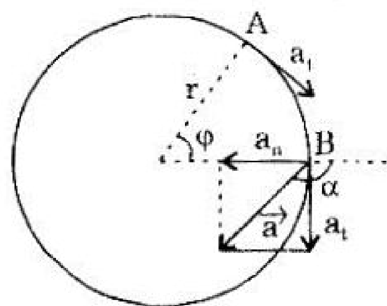
Trong trường hợp $\quad \alpha = \frac{\pi}{4}; \quad a_\varphi = \frac{a_r}{\sqrt{2}}.$

Đặt giá trị góc α vào nghiệm tổng quát mô tả sự phụ thuộc giá trị góc φ vào thời gian ta được ngay công thức :

$$\varphi(t) = \ln(\omega_0 t + 1)$$

Độc giả hãy xét khả năng xuất hiện trường hợp $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

1.61.



a) $v(t) = a_t t$, vậy ta được : $a_n(t) = \dfrac{v^2}{r} = \dfrac{a_t^2 t^2}{r}$

Ta diễn tả giá trị a_n như hàm của góc φ .

Gia tốc góc $\varepsilon = a_t/r$, $\ddot{\varphi} = \varepsilon$, do đó $\varphi = \dfrac{\varepsilon t^2}{2}$

Thời gian $t^2 = 2\varphi/\varepsilon$, và như vậy : $a_n(\varphi) = \dfrac{\varepsilon^2 r^2 2\varphi}{r.\varepsilon} = 2\varepsilon.r.\varphi$.

b) $a = \dfrac{a_t}{r}\sqrt{a_t^2 t^4 + r^2}$. Ta tìm sự phụ thuộc giá trị gia tốc vào góc φ.

Ta được $a(\varphi) = \varepsilon.r\sqrt{1 + 4\varphi^2}$. Kí hiệu góc giữa véc tơ bán kính của vật và véc tơ gia tốc bằng góc α, từ hình vẽ ta có :

$$\text{tg}\alpha = -\,\text{tg}(\pi - \alpha) = -\frac{a_t}{a_n} = -\frac{\varepsilon r}{2.\varepsilon.r.\varphi} = -\frac{1}{2\varphi}$$

Giá trị hàm $\text{tg}\alpha$ như hàm của thời gian : $\text{tg}\alpha = -\dfrac{r}{a_t t^2}$

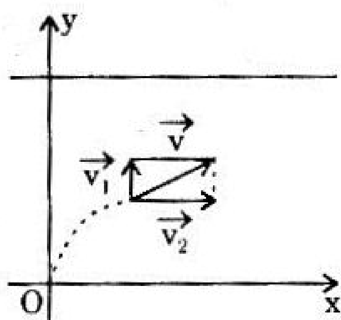
c) $$a_n = \frac{a_t^2 t_1^2}{r} = a_t, \quad \text{từ đây} \quad t_1 = \sqrt{\frac{r}{at}}$$

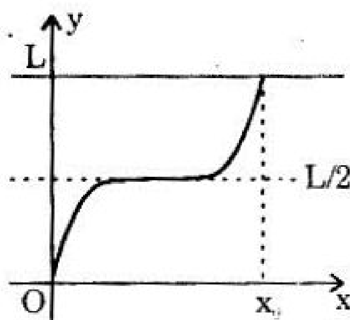
Sau thời gian t_1 kể từ khi bắt đầu chuyển động vật đạt đến điểm B. Tương ứng với thời gian đó ta có góc :

$$\varphi_1 = \frac{\varepsilon t_1^2}{2} = \frac{a_t\left(\dfrac{r}{a_t}\right)}{2r} = \frac{1}{2}$$

Từ đây ta thấy chiều dài của đoạn cung giữa các điểm A và B bằng : $s = r\varphi_1 = \dfrac{r}{2}$

1.62.





a) Theo hình, ta có : $v_x = v_0 \sin\frac{\pi y}{L} = v_2, v_y = v_1$

Vậy $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_1^2 + v_0^2 \sin^2\frac{\pi y}{L}}$.

b) Từ phương trình của v_y suy ra $y = v_y t$ (bên các điều kiện chọn ban đầu: $x(0) = 0, y(0) = 0$), vậy (hình):

$$v_x = v_0 \sin\frac{\pi v_1}{L}t$$

Từ đây : $x = \int v_0 \sin\frac{v_1\pi}{L}t = -\frac{v_0 L}{\pi v_1}\cos\frac{\pi v_1}{L}t + c$

Nhưng vì $x(0) = 0 = -\frac{v_0 L}{\pi v_1} + c$, nên ta được :

$$x = \frac{v_0 L}{\pi v_1}\left(1 - \cos\frac{\pi v_1}{L}t\right) = \frac{2v_0 L}{\pi v_1}\sin^2\frac{\pi v_1}{2L}t$$

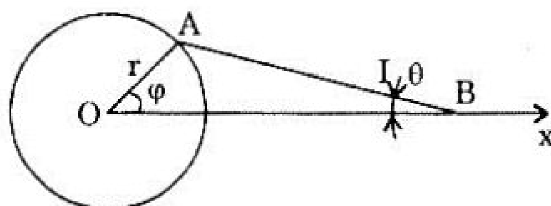
Đặt $v_1 t = y$ vào phương trình này ta được phương trình quỹ đạo :

$$x = \frac{2v_0 L}{\pi v_1}\sin^2\frac{\pi y}{2L}$$

Thay $y = L$ vào phương tình quỹ đạo ta được khoảng cách x_0 mà dòng chảy đã đưa con thuyền từ điểm xuất phát đến điểm cập bến bên bờ đối diện :

$$x_0 = \frac{2v_0 L}{\pi v_1}.$$

1.63. Từ hình bên ta có :



$$x_B = r\cos\varphi + l\cos\theta$$

Bởi vì $\varphi = \omega t$,

$$\sin\theta = \frac{r\sin\varphi}{l}.$$

Vậy ta được: $x_B = \varphi\cos\omega t + l\sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2}\sin^2\omega t}$,

hay là $x_B = \varphi\cos\omega t + \sqrt{l^2 - r^2\sin\omega t}$,

$$x_B = -r\omega\sin\omega t\left(1 + \frac{r\cos\omega t}{\sqrt{l^2 - r^2\sin\omega t}}\right)$$

1.64.

a) $v(t) = at^2 + bt + c$

$$A : 4a + 2b + c = 8$$

$$B : 16a + 4b + c = 9$$

$$C : 100a + 10b + c = 0$$

Áp dụng công thức Cramer vào giải hệ phương trình trên

$$W = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 2 \\ 100 & 10 & 1 \end{vmatrix} = -96,$$

$$W_a = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 9 & 4 & 1 \\ 0 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 24,$$

$$W_b = \begin{vmatrix} 4 & 8 & 1 \\ 16 & 9 & 1 \\ 100 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -192,$$

$$Wc = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 16 & 4 & 9 \\ 100 & 10 & 0 \end{vmatrix} = -480,$$

và do đó $a = \dfrac{W_a}{W} = -\dfrac{1}{4}$, $b = \dfrac{W_b}{W} = 2$, $c = \dfrac{W_c}{W} = 5$

Từ đây ta có : $v(t) = -\dfrac{t^2}{4} + 2t + 5$

b) $$v_0 = v(0) = 5m/s$$

c) Vận tốc cực đại suy từ điều kiện $\dfrac{dv}{dt} = 0$, tức là :

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{t}{2} + 2 = 0$$

Từ đây tìm được thời gian tương ứng :

$$t_{đỉnh} = 4s,\ v_{max} = v(t_{đỉnh}) = 9m/s$$

d) Vẽ đồ thị cho phương trình :

$$v(t) = -\frac{t^2}{4} + 2t + 5$$

e) $$S(t_2 - t_1) = \int_{t_1}^{t_2} V(t)dt$$

$$S = \int_2^4 (-\frac{1}{4}t^2 + 2t + 5)dt = 17\frac{1}{3}\,m$$

1.65.

a) $$x^2+y^2 = \frac{b^2 + d^2}{d} z$$

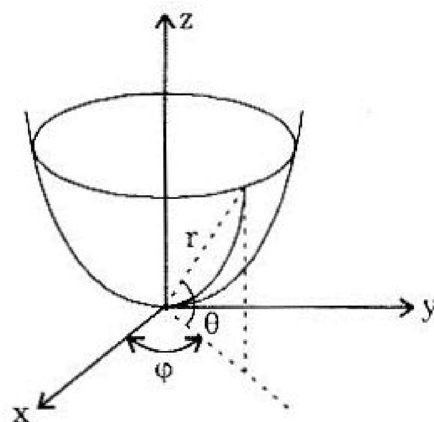
Quỹ đạo của điểm chuyển động là một nửa đường cong parabôn:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$= t\sqrt{b^2 + c^2 + d^2t^2}$$

$$\varphi = \text{arctg}\,\frac{c}{b}$$

$$\theta = \text{arctg}\,\frac{dt}{\sqrt{b^2 + c^2}}$$



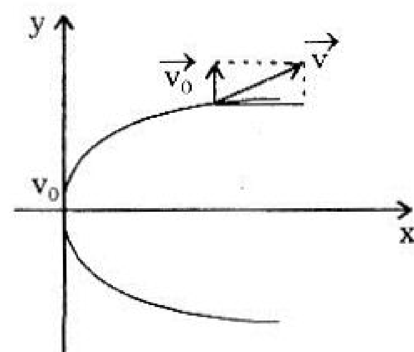
b) $$v = \dot{r} = \frac{b^2 + c^2 + 2d^2t^2}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2t^2}}.$$

1.66. Ta chọn hệ tọa độ như trên hình.

a) $$v_y = \dot{y} = v_0,\ y = v_0t$$

Phương trình quỹ đạo : $x = \dfrac{y^2}{2p}$

do đó : $x = \dfrac{v_0^2t^2}{2p}$



b) Vì $v_x = \dot{x} = t\dfrac{v_0^2}{p}$, nên : $\vec{v}\left(\dfrac{v_0^2}{p}t, v_0\right)$, $\quad v = v_0\sqrt{\dfrac{v_0^2t^2}{p^2} + 1}$

c) Các thành phần véctơ gia tốc :

$$a_x = \ddot{x} = \frac{v_0^2}{p}, \quad a_y = \ddot{y} = 0,$$

$$\vec{a}\left(\frac{v_0^2}{p}, 0\right), \quad a = \frac{v_0^2}{p}.$$

d) Gia tốc tiếp tuyến : $a_t = v' = \dfrac{v_0^3 t}{p^2\sqrt{\dfrac{v_0^2 t^2}{p^2}+1}}$

Gia tốc pháp tuyến: $a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \dfrac{v_0^2}{p}\sqrt{\dfrac{p^2}{v_0^2 t^2 + p^2}}$.

e) $$\rho = \frac{v^2}{a_n} = p\left(1 + \frac{v_0^2 t^2}{p^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

1.67. Quỹ đạo của chất điểm $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

Đạo hàm phương trình quỹ đạo trên theo thời gian ta được :

$$\frac{2xx}{a^2} + \frac{2yy}{b^2} = 0 \qquad (1)$$

từ đây $\qquad y = -\dfrac{xx}{y}.\dfrac{a^2}{b^2}$

Để tính y ta đạo hàm (1) theo thời gian và thu được:

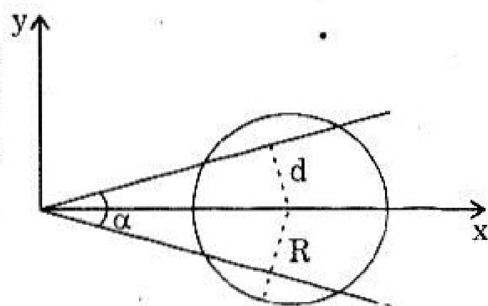
$$\frac{m}{k}(x^2+xx) + \frac{1}{b^2}(y^2+yy) = 0$$

Vì x = 0, nên : $\dfrac{1}{b^2}(y^2+yy) = -\dfrac{x^2}{a^2}$

Hay là $\qquad y = -(\dfrac{b^2}{a^2}x^2 + y^2) = \dfrac{x^2}{y^2}.\dfrac{b^4}{a^2}$

Vậy cuối cùng : $y = \dfrac{-x^2}{y^3}.\dfrac{b^4}{a^4}$.

1.68. Ta chọn tọa độ hình bên. Trục x là đường phân giác của góc α, trục y nằm trong mặt phẳng, trục z vuông góc đến mặt phẳng đó. Từ hình vẽ ta có:

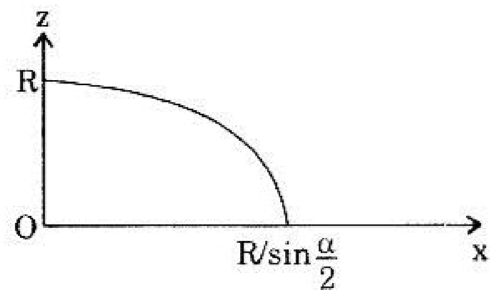


$$d = x\sin(\frac{1}{2}\alpha)$$

Vì các điểm tiếp xúc của quả cầu với cạnh của khe nằm ở khoảng cách R đến tâm quả cầu, và tọa độ y của tâm quả cầu luôn luôn bằng 0, nên

$$x^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + z^2 = R^2$$

hay
$$\frac{x^2}{\left(\dfrac{R}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}\right)^2} + \frac{z^2}{R^2} = 1$$



Ta thu được hệ thức giữa các tọa độ của tâm quả cầu, đấy là phương trình êlip. Trong trường hợp đang xét chỉ có 1/4 êlip với các tọa độ $x \geq 0$, $z \geq 0$ (hình) mới có ý nghĩa vật lý, bởi vì quả cầu sẽ rơi qua khe khi $z = 0$.

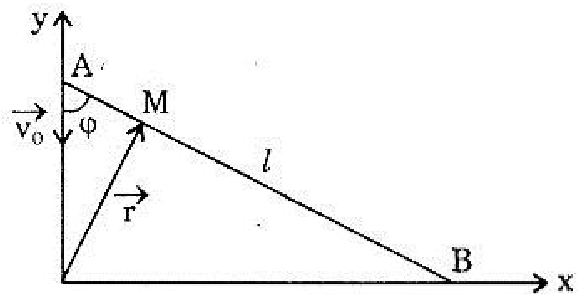
1.69. Vị trí của đầu A là hàm của thời gian xác định theo công thức :

$$y_A(t) = a - v_0t, \text{ chỉ đúng với } \quad t \leq \frac{a}{v_0}$$

Giả sử điểm M nằm cách A một khoảng bằng c, từ hình bên ta có :

$$\cos\varphi(0) = \frac{a}{l},$$

$$\cos\varphi = \frac{a - v_0t}{l}$$



Vậy tọa độ của điểm M sẽ là :

$$x_M = c.\sin\varphi = c\sqrt{1 - \left(\frac{a - v_0t}{l}\right)^2}$$

$$y_M = a - v_0t - c.\cos\varphi$$

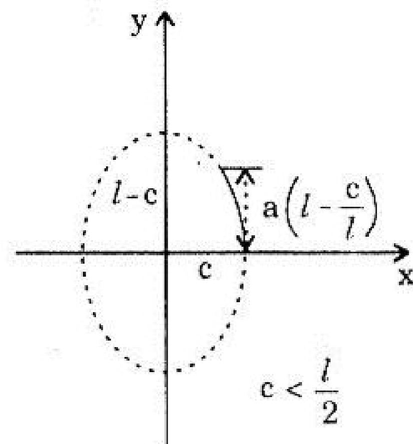
$$= a - v_0t - \frac{c(a - v_0t)}{l} = \frac{(a - v_0t)(l - c)}{l}.$$

Đường cong quỹ đạo của điểm M xác định theo công thức :

(đối với $l - c \neq 0$)

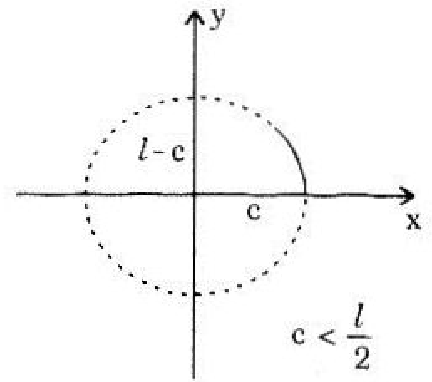
$$x_M^2 = \frac{c^2}{l^2}\left[l^2 - \frac{l^2 y_M^2}{(l - c)^2}\right],$$

hay là $$x_M^2 = \frac{c^2}{(l - c)^2}\left[(l - c)^2 - y_M^2\right]$$

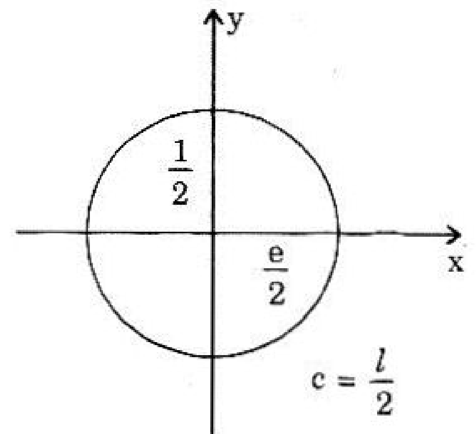


từ đây đối với $l \neq c$ và $c \neq 0$ ta có :

$$\frac{x_M^2}{C^2} + \frac{y_M^2}{(l-c)^2} = 1$$



Đấy là phương trình êlip. Vì ta quan tâm trường hợp khi $x \geq 0$, $y \geq 0$, vậy quỹ đạo của M là $\frac{1}{4}$ hình êlip. Trong trường hợp $c < \frac{1}{2}l$, bán trục dài nằm trên trục y, đối với $c > \frac{1}{2}l$ trên trục x. Trong trường hợp $c = \frac{1}{2}l$, điểm M – tâm của thanh – chuyển động theo góc vòng tròn.



Trong trường hợp c = 0, tức M = A, điểm chuyển động đều trên trục y.

Trong trường hợp $c = l$, tức M = B, điểm chuyển động trên trục x theo các phương trình :

$$x_B = \sqrt{l^2 - y_A^2} = \sqrt{l^2 - (a - v_0 t)^2}, \quad y_B = 0.$$

1.70.

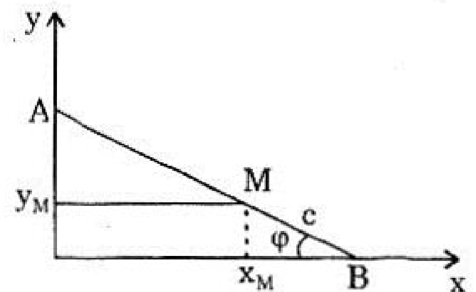
a) Sự phụ thuộc vị trí của điểm B vào thời gian:

$$x(t) = b + a\frac{t^2}{2} \quad \text{với} \quad t \leq \sqrt{\frac{2(l-b)}{a}}$$

Theo hình, ta có cho điểm M bất kỳ :

$$y_M = c.\sin\varphi,$$

$$x_M = b + \frac{at^2}{2} - c.\cos\varphi$$



Vì $\cos\varphi = \frac{b + \frac{at^2}{2}}{l}$, $\sin\varphi = \frac{1}{l}\sqrt{l^2 - \left(b + \frac{1}{2}at^2\right)^2}$

nên $x_M = \frac{l-c}{l}\left(b + \frac{at^2}{2}\right)$, $y_M = \frac{c}{l}\sqrt{l^2 - \left(b + \frac{at^2}{2}\right)^2}$

b) Các thành phần vận tốc của điểm M :

$$x = \frac{l - c}{l}at, \quad y = \frac{ac\left(b + \frac{1}{2}at^2\right)t}{l\sqrt{l^2 - \left(b + \frac{1}{2}at^2\right)^2}}$$

Do đó $\quad v^2 = x^2 + y^2 = \left(\frac{at}{l}\right)^2 \frac{(l^2 - 2lc)\left[l^2 - \left(b + \frac{1}{2}at^2\right)^2\right] + c^2l^2}{l^2 - \left(b + \frac{1}{2}at^2\right)^2}$

và $\quad v = at\sqrt{1 - \frac{2c}{l} + \frac{c^2}{l^2 - \left(b + \frac{1}{2}at^2\right)^2}}$

Khi M = A, khi đó $c = l$

$$x_M = 0, \quad y_M = \sqrt{l^2 - \left(b + \frac{at^2}{2}\right)^2}$$

Từ đây : $x_M = 0, \quad y_M = -\frac{at\left(b + \frac{at^2}{2}\right)}{\sqrt{l^2 - \left(b + \frac{a}{2}t^2\right)}}$

và $\quad v = \frac{at\left(b + \frac{at^2}{2}\right)}{\sqrt{l^2 - \left(b + \frac{a}{2}t^2\right)}}$

Khi M = B, khi đó $c = 0$:

$$x_M = b + \frac{1}{2}at^2 . y_M = 0$$

Do đó: $\quad x_M = at, \ y_M = 0 \quad$ và $\quad v = a.t$

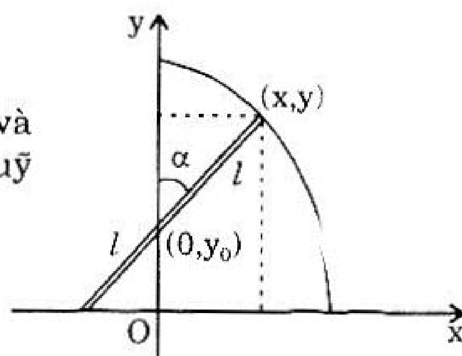
Khi M là trung điểm của thanh : $\quad c = \frac{1}{2}l$

$$x_M = \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{2}at^2\right), \quad y_M = \frac{1}{2}\sqrt{l^2 - \left(b + \frac{at^2}{2}\right)^2}$$

vậy: $x = \frac{at}{2}$, $y_M = -\frac{at\left(b + \frac{1}{2}at^2\right)}{2\sqrt{l^2 - \left(b + \frac{1}{2}at^2\right)^2}}$

và $$v = \frac{alt}{2\sqrt{l^2 - \left(b + \frac{1}{2}at^2\right)^2}}.$$

1.71. Bởi vì $\frac{x}{l} = \sin\alpha$ và $\frac{y}{2l} = \cos\alpha$



Vậy bình phương các phương trình trên và cộng lại với nhau ta được phương trình quỹ đạo của đầu thứ hai thanh gỗ.

$$\frac{y^2}{4l^2} + \frac{x^2}{l^2} = 1$$

Đây là phương trình êlip có các bán trục lớn và nhỏ: $2l$ và l.

Nếu y_0 là tọa độ của tâm thanh, thì tọa độ đầu của thanh là $y = 2y_0$, và như vậy $v_y = 2v_0$. Đạo hàm phương trình quỹ đạo ta được :

$$x\frac{dx}{dt} = -\frac{y}{4}\frac{dy}{dt} \quad \text{hay là} \quad xv_x = -\frac{y}{4}v_y$$

Thay vào đẳng thức trên $v_y = 2v_0$ và $y = 2y_0$ và cả biểu thức của x xác định từ phương trình quỹ đạo, ta tìm được :

$$v_x = \frac{y_0 v_0}{\sqrt{l^2 - y_0^2}}$$

Chú ý rằng $y_0 = l - v_0t$, sau phép biến đổi dơn giản ta đi đến biểu thức :

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v_0\sqrt{\frac{4l^2 - 3(l - v_0t)^2}{l^2 - (l - v_0t)^2}}$$

Để xác định gia tốc, ta sử dụng đạo hàm bậc 2 của phương trình quỹ đạo theo thời gian :

$$x\,a_x + v_x^2 = -\frac{1}{4}ya_y - \frac{1}{4}v_y^2$$

Thay vào đây những hệ thức đã tìm được ở trên và chỉ ý rằng $a_y^2 = 2a_{0y}^2 = 0$.

Vậy ta được : $a = a_x = \dfrac{-\frac{1}{4}v_y^2 - v_x^2}{x} = \dfrac{-v_0^2 l^2}{\left[l^2 - (l - v_0 t)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$.

1.72. Giả thiết rằng trong tất cả các hệ quy chiếu tại thời điểm ban đầu vật nằm tại vị trí (0, 0)

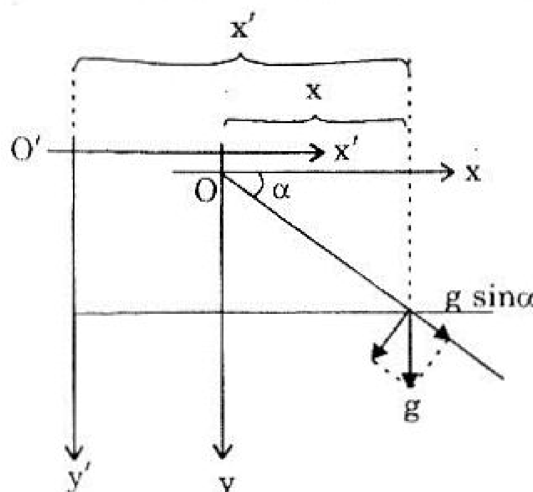
a) Đường thẳng.

b) Parabôn $y = -\dfrac{1}{2}g\dfrac{x^2}{v^2}$.

c) Parabôn $y = -\dfrac{1}{8}g\dfrac{x^2}{v^2}$.

1.73. Không đóng kín. Ví dụ nếu điểm chuyển động theo vòng tròn với vận tốc tuyến tính không đổi v, thì trong hệ quy chiếu, trong đó tâm vòng tròn chuyển động thẳng, quỹ đạo của điểm là đường con cycloid (bài I.33). Có thể nói một cách tổng quát, nếu trong một hệ quy chiếu quán tính quỹ đạo là đường cong khép kín, thì không thể đóng kín trong bất kỳ một hệ quy chiếu quán tính khác. Nếu trong hệ U vật chuyển động theo đường cong khép kín trong thời gian Δt thì quỹ đạo của nó trong hệ U' (không quán tính) là khép kín chỉ khi hệ này thực hiện so với hệ U một chuyển động để sao cho tại thời điểm đầu và thời điểm cuối của khoảng thời gian Δt đều nằm ở cùng một vị trí so với U.

1.74. Giả thiết rằng tại thời điểm t = 0 cả hai hệ tọa độ (không chuyển động U và chuyển động U') trùng nhau và gốc của chúng đặt tại điểm xuất phát của vật. Để cho tiện ta chọn cả hai trục y và y' của chúng hướng xuống dưới.



Trước hết ta xét vật trong hệ U. Thành phần gia tốc trọng trường dọc theo mặt dốc bằng a = gsin α, và do đó khoảng đường vật đi được trong khoảng thời gian t diễn tả theo công thức :

$$l = \frac{1}{2}gt^2\sin\alpha.$$

Các tọa độ của vật bằng :

$$x = l\cos\alpha = \frac{1}{2}gt^2\sin\alpha\cos\alpha, \quad y = l\sin\alpha = \frac{1}{2}gt^2\sin^2\alpha.$$

Nếu hệ U'chuyển động về phía trái với vận tốc u thì :

$x' = x + ut,\ y' = y$

Thay các giá trị của x và y được xác định trong hệ U vào ta có :

$$x' = \frac{1}{2}gt^2\sin\alpha\cos\alpha + ut; \qquad y' = \frac{1}{2}gt^2\sin^2\alpha.$$

Loại trừ t khỏi các phương trình trên ta được phương trình quỹ đạo :

$$x' = ay' + b\sqrt{y'} \qquad \text{ở đây} \quad a = \text{ctg}\,\alpha, \quad b = \left(\frac{u}{\sin\alpha}\right)\sqrt{\frac{2}{g}}.$$

Quỹ đạo của vật trong hệ U' không phải là đường thẳng.

1.75. Trong hệ quy chiếu U gắn với mặt đất ta có :

$$x = v_{0x}t, \qquad y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

Ở đây $v_{0x} = v_0\cos\alpha$, $v_{0y} = v_0\sin\alpha$, v_0 – giá trị vận tốc ban đầu của hòn đá. Loại trừ thời gian t khỏi các phương trình trên ta được phương trình quỹ đạo.

$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x - \frac{g}{2v_{0x}^2}x^2$$

Tầm xa x_{max} đạt được của hòn đá xác định từ điều kiện y = 0 ta có :

$$x_{max} = \frac{2}{g}v_{0y}v_{0x}$$

Trong hệ quy chiếu chuyển động U' tầm xa đạt hai lần lớn hơn, tức là $x'_{max} = -2x_{max}$

Bởi vì tầm xa tỷ lệ đến vận tốc, nên : $v'_{0x} = -2v_{0x}$

Theo phép biến đổi Galilê : $v'_{0x} + u = v_{0x}$

ở đây u – vận tốc của hệ quy chiếu U' so với hệ U. Kết hợp cả hai công thức trên ta tìm được :

$$u = 3v_0\cos\alpha$$

Như vậy hệ U' phải chuyển động theo hướng Tây với vận tốc u được xác định như trên.

1.76. Trong hệ quy chiếu U gắn với mặt đất phương trình quỹ đạo có dạng :

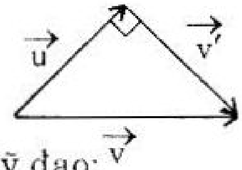
$$y = -\frac{g}{2v^2}x^2$$

Ta tìm hệ quy chiếu U', trong đó quỹ đạo của vật là đường thẳng y = –x và vận tốc của nó có giá trị không đổi v.

Ký hiệu các thành phần vận tốc của gốc hệ tọa độ U so với hệ U bằng u_x và u_y. Theo phép biến đổi Galilê ta có thể viết :

$$u_x = v - v_x, \qquad u_y = -gt - v_y$$

Tích phân các phương trình trên theo thời gian ta tìm được phương trình chuyển động của gốc hệ tọa độ U.



$$x = (v - v_x)t, \qquad y = -\frac{1}{2}gt^2 - v_y t.$$

Loại trừ thời gian t khỏi chúng ta được phương trình quỹ đạo:

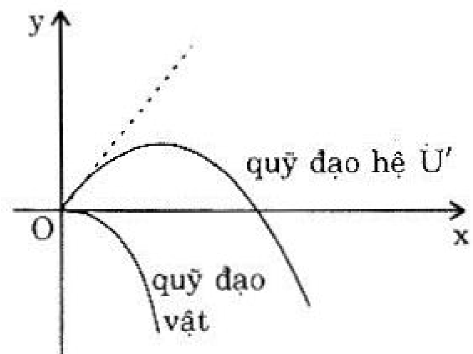
$$y = -\frac{g}{2(v - v'_x)^2}x^2 - \frac{v'_y}{v - v'_x}x$$

Để xác định giá trị v_x và v_y ta chú ý rằng véc tơ vận tốc $\vec{u}$ của hệ quy chiếu chuyển động cùng với các véc tơ v và v tại thời điểm ban đầu hợp thành tam giác vuông cân.

Từ đây suy ra $v_x = \frac{1}{2}v$, ngoài ra từ phương trình quỹ đạo y = –x ta có $v_y = -v_x$. Trên cơ sở này ta có thể viết phương trình quỹ đạo vào dạng :

$$y = -\frac{2g}{v^2}x^2 + x$$

Đấy là đường cong parabon (hình) ứng với chuyển động chiếu lên trên dưới một góc π/4 với vận tốc ban đầu $u = \frac{v}{\sqrt{2}}$.



1.77. Ta có : $x = \frac{1}{2}a_C t^2$, trong đó : a_C là gia tốc Coriolis.

Theo định nghĩa :

$$\vec{a}_C = 2\vec{v} \times \vec{\omega} \qquad \text{hay} \qquad a_C = 2v\omega\sin\varphi = 2\frac{S}{t}\omega\sin\varphi$$

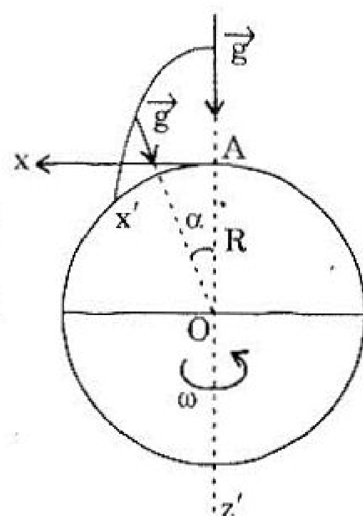
Ngoài ra : $\omega = \frac{2\pi}{T} \approx 7{,}3.10^{-5}/s$

Thay vào công thức trên ta dễ dàng suy ra : $t = \frac{xT}{2\pi S\sin\varphi} \approx 256s$.

1.78. a) $a_C = \frac{4\pi S}{Tt}\sin\varphi = 7{,}3.10^{-4}/S^2$

b) $x = \frac{2\pi S.t}{T}\sin\varphi = 3{,}65$ cm.

1.79. Ta chọn hệ tọa độ (x', y', z') gắn liền với quả Đất quay, trục x' hướng về phía Đông và trục z' hướng xuống dưới. Các điều kiện ban đầu $v'_x(0) = v'_y(0) = v'_z(0)$, $x'(0) = 0$.



$$a'_z = \frac{d^2z'}{dt^2} = g, \qquad v'_z = gt, \qquad z' = \frac{1}{2}gt^2$$

$$a'_x = \frac{d^2x'}{dt} = 2, \qquad v'_z\omega.\sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = 2\omega gt\cos\varphi$$

Tích phân phương trình trên hai lần theo thời gian, ta được :

$$\frac{dx'}{dt} = \omega gt^2\cos\varphi, \qquad x' = \frac{1}{3}\omega gt^3\cos\varphi$$

Thời gian t suy ra từ phương trình :

$$z' = \frac{1}{2}gt^2 = h \qquad \text{do đó} \qquad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

và cuối cùng : $$x' = \frac{1}{3}\omega g\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{3}{2}}\cos\varphi = \frac{2}{3}h\omega\sqrt{\frac{2h}{g}}\cos\varphi$$

Cũng có thể giải toán trong các hệ quy chiếu khác. Ví dụ: trong hệ quy chiếu đứng yên (x, y, z) ta giải thích độ lệch của vật như là hiệu vận tốc tiếp tuyến của các điểm mặt đất và vật nằm ở độ cao h phía trên nó. Theo hình trên ta có:

$$\ddot{x} = -g\sin\alpha = -\frac{g}{R}x$$

Bởi vì dịch chuyển $x = vt = (R + h)\omega t\cos\varphi$ (vận tốc tuyến tính trong chuyển động theo vòng tròn phụ thuộc vào khoảng cách đến trục quay), vậy :

$$\ddot{x} = -g\frac{(R+h)\omega t\cos\varphi}{R} \approx -g\omega t\cos\varphi$$

khi giả thiết $h << R$.

Tích phân phương trình trên ta được :

$$\dot{x} = -g\omega\frac{t^2}{2}\cos\varphi + \dot{x}_0$$

Ở đây $\dot{x}_0 = (R + h)\omega\cos\varphi$ là vận tốc ngang của vật ở độ cao h, từ đó :

$$\dot{x} = \left[(R+h)\omega - \frac{1}{2}g\omega t^2\right]\cos\varphi$$

Tích phân tiếp lần nữa ta thu được :

$$x = \left[(R+h)\omega t - \frac{1}{6}g\omega t^3\right]\cos\varphi, \quad \text{vì } x(o) = x_0 = 0.$$

Bởi vì trong thời gian t điểm A trên mặt đất so với hệ không chuyển động đã dịch chuyển được một đoạn đường $x_1 = R\omega t\cos\varphi$, độ lệch của vật sẽ bằng hiệu quãng đường mà vật và điểm A đã đi qua :

$$x' = x - x_1 = \left[h\omega t - \frac{1}{6}g\omega t^3\right]\cos\varphi$$

Cuối cùng thay $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ ta được :

$$x' = h\omega\sqrt{\frac{2h}{g}}\cos\varphi - \frac{1}{6}\omega.2h\sqrt{\frac{2h}{g}}\cos\varphi = \frac{2}{3}h\omega\sqrt{\frac{2h}{g}}\cos\varphi$$

Từ kết quả thu được ta thấy độ lệch lớn nhất khi tháp đặt trên xích đạo và bằng không tại các cực quả Đất.

2.1. Giả sử, từ trạng thái 3 lò xo tự nhiên, do tác dụng lực F, hệ lò xo dãn một đoạn Δl (đoạn dịch của điểm A) các lò xo dãn các đoạn Δl_1, Δl_2, Δl_3.

Phương trình động lực là :

$$F = K\Delta l = \frac{1}{2}K_1\Delta l_1 = \frac{1}{2}K_3\Delta l_3 = K_2\Delta l_2$$

$$\Delta l_1 = \frac{2F}{K_1} = 0{,}02\ (m)$$

$$\Delta l_2 = \frac{F}{K_2} = 0{,}01\ (m)$$

$$\Delta l_3 = \frac{2F}{K_3} = 0{,}02\ (m)$$

Phương trình động học là : $\Delta l = 2\Delta l_1 + 2\Delta l_3 + \Delta l_2 = 0{,}09$ m

Vậy điểm A dịch 9 cm.

2.2. Tác dụng một ngoại lực F để các lò xo biến dạng. Lực đàn hồi là phản lực của F, nên cũng bằng F.

a) Do tác dụng lực F, điểm đặt A dịch một đoạn Δl, Δl cũng là độ biến dạng của hệ. Ta có 2 phương trình:

$2\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2$ (Δl_1, Δl_2 là độ biến dạng của các lò xo) (1)

$F = F_1 + F_2 = 2F_1 = 2F_2$

$F = K\Delta l = 2K_1\Delta l_1 = 2K_2\Delta l_2$ (2)

Rút Δl, Δl_1, Δl_2 từ (2) thay vào (1) ta có:

$$\frac{2F}{K} = \frac{F}{2K_1} + \frac{F}{2K_2} \Rightarrow \frac{2}{K} = \frac{1}{2K_1} + \frac{1}{2K_2} \Rightarrow K = \frac{4K_1K_2}{K_1 + K_2}$$

b) Tương tự phần a, ta có :

$$\Delta l = 2\Delta l_1 + \Delta l_2 \quad (1)$$

$$F = K\Delta l = \frac{1}{2}K_1\Delta l_1 = K_2\Delta l_2 \quad (2)$$

Giải hệ (1), (2) ta có $K = \dfrac{K_1K_2}{K_1 + 4K_2}$

c)

$$\Delta l = 2(\Delta l_1 + \Delta l_2) \quad (1)$$

$$F = K\Delta l = \frac{1}{2}K_1\Delta l_1 = \frac{1}{2}K_2\Delta l_2 \quad (2)$$

$$K = \frac{K_1K_2}{4(K_1 + 4K_2)}$$

d)

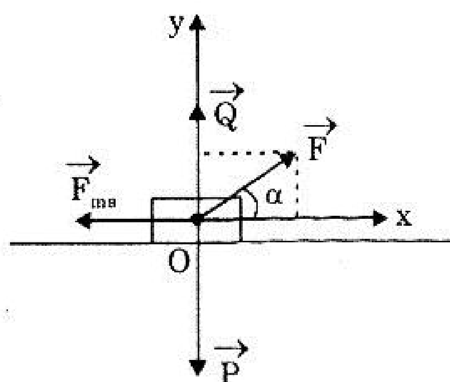
$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 \quad (1)$$

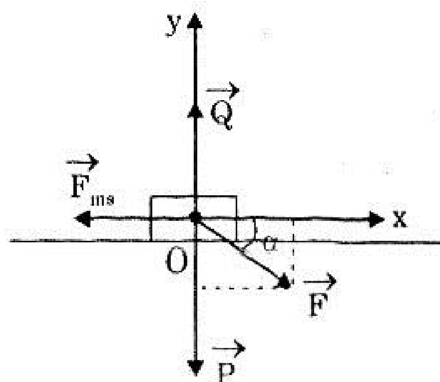
$$F = K\Delta l = 2K_1\Delta l_1 = 2K_2\Delta l_2 = 2K_3\Delta l_3 \quad (2)$$

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{4K_1} + \frac{1}{4K_2} + \frac{1}{4K_3} \Rightarrow K = \frac{4K_1K_2K_3}{K_1K_2 + K_1K_3 + K_2K_3}$$

2.3.

1.





Vật đứng yên, do tổng hợp lực bằng 0

$$\vec{P} + \vec{Q} + \vec{F} + \vec{f_{ms}} = \vec{0} \quad (1)$$

Chiếu (1) lên Ox :

$$F\cos\alpha - f_{ms} = 0 \quad (1a)$$

Vậy cả hai trường hợp, lực chếch lên hay chếch xuống ta đều có :

$$f_{ms} = F\cos\alpha = 5\sqrt{3}\text{ (N)}.$$

2. Ta sử dụng hình vẽ, thay lực ma sát nghỉ $\overrightarrow{f_{ms}}$ bởi véc tơ $\overrightarrow{f_{ms}}$

$$\vec{P} + \vec{Q} + \vec{F} + \overrightarrow{F_{ms}} = \vec{0} \quad (1)$$

a) F chếch lên 30^0 : Chiếu (1) lên Oy, ta thu được

$$Q = P - F\sin\alpha \quad (2y)$$

Chiếu (1) lên trục Ox

$$KQ = F\cos\alpha \quad (2x)$$

$$K(P - F\sin\alpha) = F\cos\alpha$$

$$F = \frac{KP}{\cos\alpha + K\sin\alpha} \quad (3)$$

$$F = \frac{\frac{10}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{1}{2}} = 5\ (N)$$

b) F chếch xuống 30^0 : Giải tương tự, ta có :

$$F = \frac{KP}{\cos\alpha - K\sin\alpha} = 10\ (N)$$

2.4. Đường đi từ đỉnh lên chân là : $S = \frac{1}{\cos\alpha}$

Gia tốc là : $a = g(\sin\alpha + K\cos\alpha)$

Ta có : $S = \frac{at^2}{2}$

$$t = \sqrt{\frac{2S}{a}} = \sqrt{\frac{2l}{g\cos\alpha(\sin\alpha - K\cos\alpha)}} \quad (2)$$

Dùng đạo hàm bậc nhất, t có cực tiểu khi $tg\alpha = \frac{1}{K}$

2.5. Do lên đều nên :

$$\vec{P} + \vec{Q} + \vec{F} + \overrightarrow{F_{ms}} = \vec{0} \quad (1)$$

Chiếu (1) lên Oy, ta có :

$$-P\cos\alpha + Q + F\sin\beta = 0 \quad (2)$$

Chiếu (1) lên Ox, ta có :

$$-P\sin\alpha - KQ + F\cos\beta = 0 \quad (3)$$

Rút Q từ (2) thay vào (3) ta có : $F = \frac{P(\sin\alpha + K\cos\alpha)}{\cos\beta - K\sin\beta}$

Tử số không đổi, dùng đạo hàm ta khảo sát mẫu số. Mẫu số cực tiểu khi $K = tg\beta$.

Khi đó $F_{min} = \frac{mg(\sin\alpha + K\cos\alpha)}{\sqrt{1+K^2}}$.

2.6. Lấy nêm làm hệ qui chiếu, m cân bằng nhờ 4 ngoại lực.

$$\vec{P} + \overrightarrow{Q_{21}} + \overrightarrow{F_{ms}} + \vec{F'} = \vec{0} \quad (1)$$

Với $\overrightarrow{f_{ms}} \leq \overrightarrow{KQ}$ (2)

Và $\vec{F'} = -m\vec{a}$ (3)

Chiếu (1) lên Oy :

$$Q - P\cos\alpha - P\sin\alpha - ma\sin\alpha = 0 \quad (1y)$$

Chiếu (1) lên Ox :

$$ma\cos\alpha - P\sin\alpha - f_{ms} = 0 \quad (1x)$$

Rút Q từ (1y) thay vào (1x), ta có :

$$f_{ms} = ma\cos\alpha - P\sin\alpha \leq KQ$$

$$ma\cos\alpha - P\sin\alpha \leq K(P\cos\alpha + ma\sin\alpha)$$

$$ma(\cos\alpha - K\sin\alpha) \leq mg(\sin\alpha + K\cos\alpha)$$

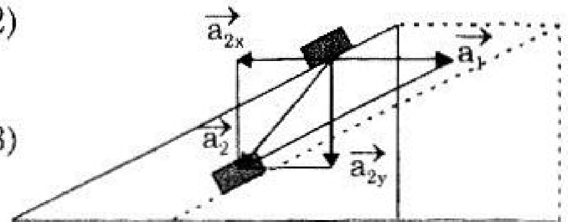
$$a \leq g\frac{1 + K\cot g\alpha}{\cot g\alpha - K}.$$

2.7. Do bỏ qua ma sát ta có :

$$a_1 = \frac{Q_{21}.\sin\alpha}{m_1} \quad (1)$$

$$a_{2x} = -\frac{Q_{12}.\sin\alpha}{m_2} \quad (2)$$

$$a_{2y} = -\frac{P_2.Q_{12}.\cos\alpha}{m_2} \quad (3)$$



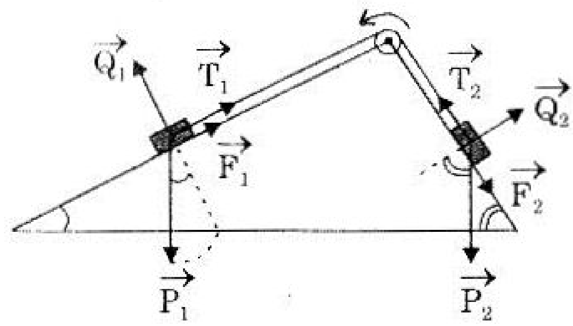
Đồng thời ta lại có :

$$(a_1 - a_{2x})\, tg\alpha = a_{2y} \quad (4)$$

Thay (1), (2), (3) vào (4), ta tính được Q_{12}, thay Q_{12} vào biểu thức (1), ta có :

$$a_1 = \frac{g\sin\alpha.\cos\alpha}{\sin^2_\alpha + \frac{m_1}{m_2}}.$$

2.8.



1. a) Hai vật đang chuyển động sao cho ròng rọc quay ngược chiều kim đồng hồ.

Coi hai vật là hệ vật. Lực phát động của hệ vật là $P_1\sin\alpha_1$.

Lực cản là : $F_1 + F_2 + P_2\sin\alpha_2$

Vậy gia tốc của hệ là :

$$a = -\frac{P_1\sin\alpha_1 - K_1P_1\cos\alpha_1 - K_2P_2\cos\alpha_2 - P_2\sin\alpha_2}{m_1 + m_2} \qquad (1)$$

b) Nếu hệ trong chuyển động theo chiều ngược lại, suy từ (1), ta có, gia tốc :

$$a' = -\frac{P_2\sin\alpha_2 - K_2P_2\cos\alpha_2 - K_1P_1\cos\alpha_1 - P_1\sin\alpha_1}{m_1 + m_2} \qquad (2)$$

2. Nếu ban đầu hệ đứng yên

a) Nếu $P_1\sin\alpha_1 > P_2\sin\alpha_2$ thì hệ chỉ có khả năng chuyển động ngược chiều kim đồng hồ. Nếu tử số của (1) âm thì hệ đứng yên . Vậy

Hệ sẽ tiếp tục đứng yên nếu :

$$KP_1\cos\alpha_1 + P_2(\sin\alpha_2 + K\cos\alpha_2) > P_1\sin\alpha_1 > P_2\sin\alpha_2$$

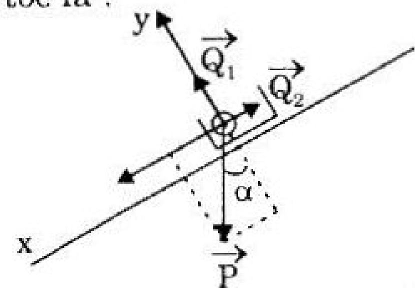
hay $$\frac{P_2(\sin\alpha_2 + K\cos\alpha_2)}{\sin\alpha_1 - K\cos\alpha_1} > P_1 > \frac{P_2\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1} \qquad (I)$$

b) Nếu $P_2\sin\alpha_2 > P_1\sin\alpha_1$ thì hệ chỉ có thể đi theo chiều kim đồng hồ và nếu tử số của a âm thì hệ sẽ tiếp tục đ

$$\frac{P_1(\sin\alpha_1 + K\cos\alpha_1)}{\sin\alpha_2 - K\cos\alpha_2} > P_2 > \frac{P_1\sin\alpha_1}{\sin\alpha_1} \qquad (II)$$

Hai điều kiện (I) và (II) không có phần giao nhau, nên ta không qui về 1 điều kiện tổng quát được.

2.9. Hộp chứa hình cầu được coi như một vật, có gia tốc là :



$$a = g(\sin\alpha - K\cos\alpha)$$

$$a = 10\left[0{,}5 - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{10}\right] = 3{,}5\,\frac{m}{s^2}$$

Xét riêng quả cầu, nó chịu tác dụng của 3 lực:

$\overrightarrow{Q_1}$; $\overrightarrow{Q_2}$ là phản lực do hộp tác dụng lên hình cầu. $\vec{P}$ là trọng lực :

$$\vec{P} + \overrightarrow{Q_1} + \overrightarrow{Q_2} = \overrightarrow{ma} \qquad (1)$$

Chiếu (1) lên Oy, ta có :

$$-P\cos\alpha + Q_1 = 0$$

$$Q_1 = P\cos\alpha$$

$$Q_1 = 50\frac{\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3} \quad (N)$$

Chiếu (1) lên Ox, ta có :

$$P\sin\alpha - Q_2 = ma$$

$$Q_2 = P\sin\alpha - ma$$

Thay số $Q_2 = 50.\frac{1}{2} - 5.3,5 = 7,5 \ (N)$

$$Q_2 = 7,5 \ (N).$$

2.10.

* Gọi v_A, v'_A là vận tốc qua A lúc đi và lúc về, S = AB

Ta có : Vận tốc trung bình lúc đi lên là $\frac{v_A}{2}$, lúc đi xuống là $\frac{v_A'}{2}$.

Thời gian về gấp hai lần thời gian đi, chứng tỏ $V_A = 2V_A'$ (1)

* Gọi a và a' là gia tốc lần đi lên, lần đi xuống

Ta có : $a = -g(\sin\alpha + K\cos\alpha)$, $a' = g(\sin\alpha - K\cos\alpha)$

* Áp dụng công thức :

$$v_t^2 - v_0^2 = 2aS$$

Lúc đi : $0^2 - v_A^2 = 2aS$

Lúc về $v'^2_A - 0^2 = 2aS$

Suy ra $\frac{a}{a'} = -\left(\frac{v_A}{v'_A}\right)^2 = -4 \Rightarrow \frac{-g(\sin\alpha + K\cos\alpha)}{g(\sin\alpha - K\cos\alpha)} = -4$

$$\Rightarrow \frac{\sin\alpha + K\cos\alpha}{\sin\alpha - K\cos\alpha} = 4 \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}K}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}K} = 4$$

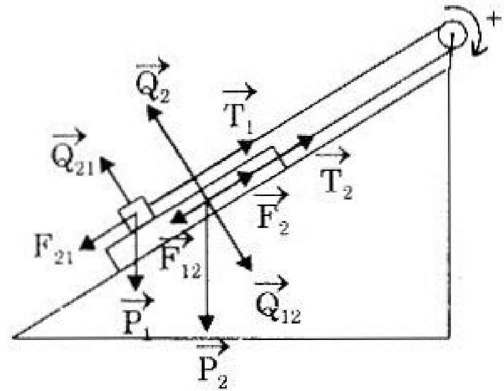
$$\Rightarrow \frac{1 + \sqrt{3}K}{1 - \sqrt{3}K} = 4 \Rightarrow 1 + \sqrt{3}K = 4 - 4\sqrt{3}K$$

$$\Rightarrow K = \frac{\sqrt{3}}{5}.$$

2.11.

1. Vật m_1 chịu tác dụng của 4 lực :

   - Trọng lực $\vec{P_1}$
   - Lực căng sợi dây $\vec{T_1}$
   - Phản lực ván lên m_1 $\overrightarrow{Q_{21}}$
   - Ma sát trượt do ván tác dụng $\overrightarrow{F_{21}}$



   Vật m_2 chịu tác dụng của 6 lực :

   - Trọng lực $\vec{P_2}$
   - Phản lực của mặt nghiêng $\vec{Q_2}$
   - Phản lực của m_1 $\overrightarrow{Q_{12}}$
   - Ma sát của mặt nghiêng $\vec{F_2}$
   - Ma sát của m_1 lên $\overrightarrow{F_{12}}$
   - Lực căng sợi dây $\vec{T_2}$

   Chọn chiều dương như hình vẽ; hệ hai vật có cùng gia tốc a

   Lực phát động duy nhất là $P_2\sin\alpha$.

   4 lực cản là :

   + $P_1\sin\alpha$.
   + Ma sát của mặt nghiêng : $F_2 = K_2(P_1 + P_2)\cos\alpha$
   + Cả hai lực ma sát : $F_{12} = F_{21} = K_{12}P_1\cos\alpha$

$$a = \frac{P_2 \sin\alpha - [P_1(\sin\alpha + 2K_{12}\cos\alpha) + K_2(P_1 + P_2)\cos\alpha}{m_1 + m_2}$$

   Thay số ta có : $a = 2{,}95$ m/s^2.

2. Trong bài này hai nội lực là hai lực ma sát trượt $\overrightarrow{F_{12}} - \overrightarrow{F_{21}}$, chúng có tổng bằng $\vec{0}$, nhưng chúng tham gia vào biểu thức của gia tốc (thông thường, nội lực không sinh gia tốc cho hệ).

2.12. Chọn chiều dương như hình vẽ thì gia tốc của hệ là :

$$a_1 = a_2 = \frac{p_1 - P_2}{m_1 + m_2} = \frac{g}{2}$$

Khi m tiếp đất thì m_2 có độ cao $2h_0$ và có vận tốc

$$v = \sqrt{2ah_0} = \sqrt{gh_0}$$

Sau đó, dây chùng, m_2 chuyển động như vật được ném lên từ độ cao $2h_0$ với vận tốc ban đầu v.

Nó lên tiếp được một đoạn :

$$h_2 = \frac{v_2}{2g} = \frac{gh_0}{2} = \frac{h_0}{2}$$

Vậy độ cao cực đại mà m_2 đạt được là :

$$h_{max} = 2,5\ h_0 = 2,5\ (m)$$

2.13. Chọn chiều dương như hình vẽ, phương trình động lực của hai vật (sau lúc đã chiếu lên chiều dương) là

$$Mg - T = Ma_1 \quad (1)$$

$$Mg - F_{ms} = ma_2 \quad (2)$$

$$T = F_{ms}$$

Rút ra $\quad a_1 = g - \dfrac{T}{M}, \qquad a_2 = g - \dfrac{T}{m}$

Gia tốc tương đối :

$$a_{12} = a_1 - a_2 = T - \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{M}\right) = T\frac{M - m}{m + M}$$

Đường đi của chuyển động tương đối :

$$S_{12} = l = a_{12}.\frac{t^2}{2} \quad \Rightarrow \quad a_{12} = \frac{2l}{t^2} = T\frac{M - m}{mM}$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{2lmM}{(M - m)t^2}$$

Vậy : $\quad F_{ms} = \dfrac{2lmM}{(M - m)t^2}.$

2.14. Chọn chiều dương như hình vẽ, ta có các phương trình

$$P_1 - 2T = m_1a_1 \quad (1)$$

$$P_2 - T = m_2a_2 \quad (2)$$

$$a_2 = -2a_1 \quad (3)$$

Rút a_1, a_2 từ (1), (2) thay vào (3), ta có :

$$a_1 = g - \frac{2T}{m_1}, a_2 = g - \frac{T}{m_2}$$

và : $$-2\left(g-\frac{2T}{m_1}\right)=\left(g-\frac{T}{m_2}\right)$$

$$3g=T\left[\frac{4}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right]=\frac{4m_2+m_1}{m_1m_2}$$

$$T=\frac{3gm_1m_2}{4m_2+m_1},$$

Thay số $T = 15m_2$, $a_1 = 2,5\ m/s^2$, $a_2 = -5\ m/s^2$

Xét khi m_1 chạm đất, mất lực căng sợi dây m_2 bắt đầu chuyển động ném lên.

Cho đến khi chạm đất m_1 đi được $h=|a_1|\frac{t^2}{2}$

$$m_2 \text{ đi được } S=|a_2|\frac{t^2}{2}=2h$$

Vận tốc của m_2 : $v_2=\sqrt{2|a_2|S^2}$

Nó tiếp tục lên được : $h_2=\frac{v_2^2}{2g}=\frac{2|a_2|S^2}{2g}=h$

Kết quả vật 2 đạt độ cao cực đại là :

$$h_{max} = S_2 + h_2 = 3h = 0,6m.$$

2.15. Chọn các chiều dương như hình vẽ. Phương trình chuyển động của 3 vật (sau lúc đã chiếu lên Ox) là :

$$P_1 - T_1 = m_1a_1 \qquad (1)$$

$$P_2 - T_2 = m_2a_2 \qquad (2)$$

$$T_0 = m_0a_0 \qquad (3)$$

Đồng thời theo cách chọn trên ta có :

$$2a_0 = a_1 + a_2 \qquad (4)$$

$$T_0 = 2T_1 = 2T_2 = 2T$$

Rút a_0, a_1, a_2 từ 3 phương trình đầu, thay vào (4) ta có :

$$a_1=g-\frac{T}{m_1}$$

$$a_2=g-\frac{T}{m_2}$$

$$a_0=\frac{2T}{m_0}$$

$$\frac{4T}{m_0} = 2g - T\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)$$

$$T\left[\frac{4}{m_0} + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right] = 2g$$

$$T = \frac{2g}{\frac{4}{m_0} + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}}$$

$$a_1 = g\frac{T}{m_1} = g\left[1 - \frac{2g}{m1\left[\frac{4}{m_0} + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right]}\right]$$

Biện luận :

* Nếu $m_1 = 0$ thì $a_1 = -g$ vật m_2 rơi tự do, m_1 đi lên $|a_1| = |g|$

* Nếu $m_0 = 0$ thì $a_1 = -g$, $a_2 = g$ m_1, m_2 cùng rơi tự do.

2.16.

1. Xe M chịu tác dụng 7 lực

   - Trọng lực $P_1 = Mg$ –
   - Phản lực Q_1 vuông góc từ mặt đường
   - 3 lực căng sợi dây
   - Phản lực Q_{21} từ m lên M theo phương song song mặt đường, hãm chuyển động M.
   - Lực ma sát F_{21} do m tác dụng lên M, hướng trên xuống.

2. Vật m chịu tác dụng của 4 lực :

   - Trọng lực $P_2 = mg$
   - Lực căng sợi dây
   - Lực đẩy của M theo phương ngang Q_{12}
   - Lực ma sát trượt F_{12} hướng từ dưới lên cản chuyển động của m

3. Gọi a_1x, a_1y là 2 thành phần gia tốc của xe M

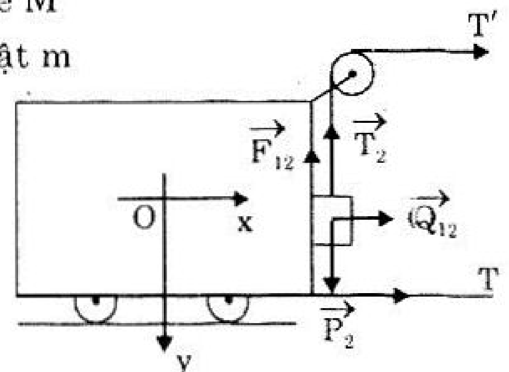
   a_2x, a_yy là 2 thành phần gia tốc của vật m

Ta có : $a_1x = a_2x = a_1$

$a_1y = 0$

$a_2y = 2a_1$

$a_2 = a_1\sqrt{5}$



Chọn hệ quy chiếu như hình vẽ.

Phương trình cho hệ 2 vật

$$2T = (M + m)\,a_1 \qquad (1)$$

Cho vật m : $Q_{12} = ma_{2x} = ma_1 \qquad (2)$

$$mg - KQ_{12} - T = ma_{2y} = 2ma_1 \qquad (3)$$

Giải ra : $a_1 = \dfrac{2mg}{(5 + 2K)m + M}$

Thay số : $a_1 = 1\text{m/s}^2$.

2.17.

1. m_1 chịu tác dụng 2 lực :

   Trọng lực P_1 và lực căng T_1

   m_2 chịu tác dụng 5 lực :

   2 lực căng T_1, T_3 khác nhau

   Trọng lực P_2, phân lực vuông góc Q_2 và lúc ma sát F_{ms}

   m_3 chịu tác dụng 2 lực :

   Trọng lực P_3 và lực căng T_3

   m_4 chịu tác dụng 9 lực :

   4 lực căng sợi dây

   Phân lực vuông góc do m_2 đè lên là Q_{24}

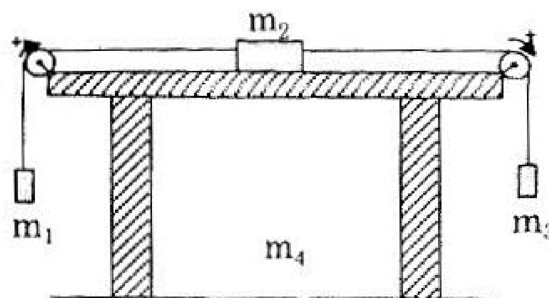
   Lực ma sát trượt do m_2 tác dụng lên bàn.

   Tổng hợp của lực ma sát nghỉ tác dụng lên 4 chân

   Trọng lực P_4

   Phân lực của mặt đường Q_4

2.



Chọn chiều dương như hình vẽ.

$$a_1 = a_2 = a_3 = \frac{P_3 - P_1 - K_2P_2}{m_1 + m_2 + m_3} = 3\ \text{m/s}^2.$$

3. Bàn đứng yên

$$\overrightarrow{Q_4} + \overrightarrow{P_4} + \overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_1'} + \overrightarrow{T_3} + \overrightarrow{T_3'} + \overrightarrow{Q_{24}} + \overrightarrow{f_{ms}} + \overrightarrow{F_{ms}} = \vec{Q}$$

Theo phương ngang ta có :

$$f_{ms} - T_3' + T_1' + F_{ms} = 0$$

$$f_{ms} = T_3' - T_1' - F_{ms} = 21 - 13 - 2 = 6 \text{ (N)}$$

Theo phương thẳng đứng, ta có :

$$Q_4 = P_4 + T_1 + T_3 + Q_{24} = 100 + 13 + 21 + 20 = 154$$

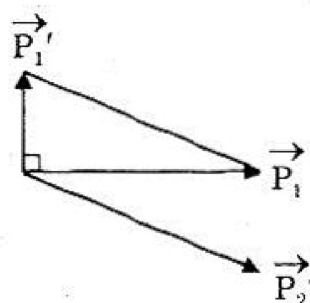
Do $f_{ms} \le KQ_4$

$$K \ge \frac{f_{ms}}{Q_4}$$

Thay số vào ta có : $K \ge \frac{6}{154} \quad \Rightarrow \quad K \ge \frac{3}{77}$.

2.18.

a) Ký hiệu $\overrightarrow{P_1}$ là động lượng ban đầu của hạt 1, cũng là tổng động lượng ban đầu.



$\overrightarrow{P_1}$, $\overrightarrow{P_2}$ là động lượng sau va chạm.

Từ định luật bảo toàn động lượng :

$$p_2'^2 = p_1^2 + p_1'^2$$

$$m_2^2 v_2'^2 = m_1^2 v_1^2 + m_1^2 v_1'^2 \qquad (1)$$

Từ định luật bảo toàn cơ năng, biểu hiện thành bảo toàn tổng động năng :

$$\frac{m_2^2 v_2^2}{2} = \frac{m_1^2 v_1'^2}{2} + \frac{m_2^2 v_2'^2}{2} \qquad (2)$$

Giải hệ (1) và (2) ta có : $v_1'^2 = v_1^2 \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}$

Ký hiệu : W_{d1}, W'_{d1} là động năng của hạt 1 trước và sau va chạm :

$$W'_{d1} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} W_{d1}$$

Vậy : $$\frac{\Delta W_{d1}}{W_{d1}} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}$$

b) Xuyên tâm : Do các véc tơ vận tốc cùng giá nhau, nên ta có :

$$m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \qquad (1)$$

$$m_1 \frac{v_1^2}{2} = m_1 \frac{v_1'^2}{2} + m_2 \frac{v_1'^2}{2} \qquad (2)$$

Giải hệ (1), (2) ta có : $v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$ (3)

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (4)$$

Đưa v'_1 từ (3) vào động năng sau của m_1 ta có :

$$\frac{\Delta W_{d1}}{W_{d1}} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}.$$

2.19.

a) Đàn hồi xuyên tâm

Từ định luật bảo toàn động lượng : $p_1 = p'_1 + p'_2$

$$m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \quad (1)$$

Từ định luật bảo toàn cơ năng : $m_1 \frac{v_1^2}{2} = m_1 \frac{v_1'^2}{2} + m_2 \frac{v_1'^2}{2}$ (2)

Giải hệ (1), (2) ta có : $v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$ (3)

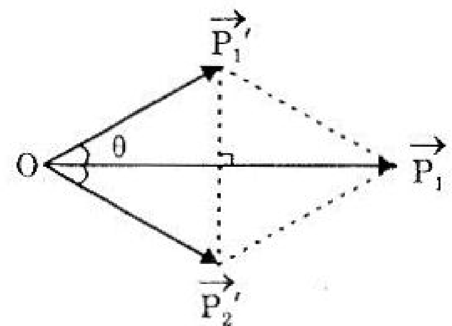
$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \quad (4)$$

Cho $v'_1 = - v'_2$. Suy ra : $\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}$.

b) Từ định luật bảo toàn động lượng ta suy ra :

$$p_1 = 2p_1'\cos\theta = 2p_2'\cos\theta$$

Từ định luật bảo toàn cơ năng ta có :



$$W_{d1} = W_{d1}' + W_{d2}'$$

$$\frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_1'^2}{2m_2}$$

$$p_1^2 = p_1'^2 + \frac{m_1}{m_2} p' \frac{2}{1} = (1 + \frac{m_1}{m_2}) p_1'^2$$

Vậy : $\frac{m_1}{m_2} = 2$.

2.20. Chọn chiều dương ngược với vận tốc u

1. Nhảy đồng thời :

Theo định luật bảo toàn động lượng

$$0 = 2m(v + u) + Mv$$

$$v = -\frac{2m}{M + 2m}u \quad (1)$$

2. Kẻ trước người sau :

a) Người thứ nhất nhảy ra, gọi v_1 là vận tốc xe có người thứ 2

$$0 = 2m(v_1 + u) + (M + m)v_1$$

$$v_1 = -\frac{m}{M + 2m}u$$

b) Người thứ hai, nhảy tiếp, gọi v' là vận tốc của xe M

Ta có : $(M + m)v_1 = m(v' + u) + Mv'$

$$-\frac{mu}{M + 2m}(m + M) = (m + M)v' + mu$$

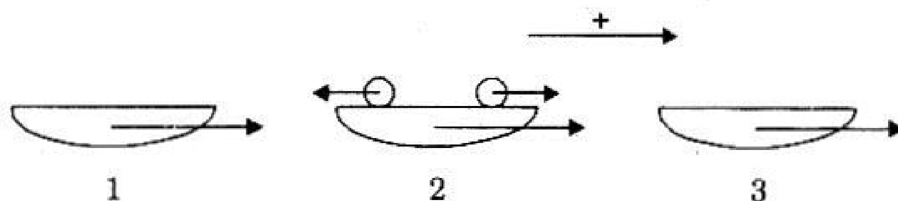
$$-\frac{-mu(2M + 3m)}{M + 2m}u = (m + M)v'$$

$$v' = \frac{-m(2M + 3m)}{(m + M)(2m + M)}u$$

3. So sánh hai vận tốc :

Từ (1), (2) ta có : $\frac{v'}{v_1} = 1 + \frac{m}{2(M + m)} > 1.$

2.21.



a) Gọi v_0 là vận tốc ban đầu của 3 thuyền.

α) Thuyền 2: Gọi v_2 là vận tốc sau khi ném

$$M\vec{v_0} = (M - 2m)\vec{v_2} + m(\vec{v_2} + \vec{u}) + m(\vec{v_2} - \vec{u}) = M\vec{v_2}$$

$$\vec{v_2} = \vec{v_0} \quad (1)$$

β) Thuyền 1 :

$$M\vec{v_0} = m(\vec{v_2} - \vec{u}) = (M + m)\vec{v_1}$$

$$(M + m)\vec{v_0} - m\vec{u} = (M + m)\vec{v_1}$$

$$\vec{v_1} = \vec{v_0} - \frac{m}{M + m}\vec{u}$$

γ) Thuyền 3 :

$$M\overrightarrow{v_0} + m(\overrightarrow{v_2} + \vec{u}) = (M + m)\overrightarrow{v_3}$$

$$(M + m)\overrightarrow{v_0} + m\vec{u} = (M + m)\overrightarrow{v_3}$$

$$\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{v_0} + \frac{m}{M + m}\vec{u}$$

b) Chọn hệ quy chiếu gắn với thuyền 2 :

* Ban đầu cả 3 thuyền đứng yên

* Sau lúc ném

α) Thuyền 2: $\vec{0} = M\overrightarrow{v'_2} + m\vec{u} - m\vec{u} \Rightarrow \overrightarrow{v'_2} = v_0$

β) Thuyền 1 : $\vec{0} - m\vec{u} = (m + M)\overrightarrow{v'_1} \Rightarrow \overrightarrow{v'_1} = -\frac{m}{M+ m}\vec{u}$

γ) Thuyền 3 : $\vec{0} + m\vec{u} = (m + M)\overrightarrow{v'_3} \Rightarrow \overrightarrow{v'_3} = \frac{m}{M+ m}\vec{u}$.

2.22.

a) Hệ xe và người là hệ kín. Chọn chiều dương như hình vẽ, gọi v'_1 là vận tốc xe sau khi nhảy.

Vận tốc người là $v_2' = v_1' - 2$

Ta có : $(m_1 + m_2)\, v_1 = m_1v_1' + m_2v_2' = (m_1 + m_2)\, c_1' - 2m_2$

$$v_1' = \overrightarrow{v_1} + \frac{2m_2}{m_1+ m_2} = 1 + \frac{2}{5} = 1{,}4\,\frac{m}{s}$$

b) Hệ vẫn là hệ kín :

$$(m_1 + m_2)\, v_1 = m_1v_1' + m_2\,(v_1 + 2)$$

$$v_1' = \overrightarrow{v_1} - \frac{2m_2}{m_1+ m_2} = 0{,}6\,\frac{m}{s}$$

c) Hệ xe và người không phải là hệ kín.

Tuy nhiên ta có thể áp dụng định luật bảo toàn thành phần động lược dọc theo trục chuyển động.

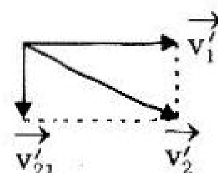
$$(m_1 + m_2)\, v_{1x} = m_1v_{1x}' + m_2\, v'_{2x}$$



Do nhảy vuông góc với mặt đất nên $v'_{2x} = 0$

$$v'_{1x} = \frac{m_1 + m_2}{m_1}\, v_{1x} = \frac{300}{240} = 1{,}25\,\frac{m}{s}$$

d) Hệ xe và người cũng không kín.



Trong hình vẽ , $\overrightarrow{v'_1}$ là vận tốc xe so với đất.

$\overrightarrow{v'_2}$ là vận tốc người so với đất.

$\overrightarrow{v'_{21}}$ vận tốc tương đối của người so với xe.

Theo giả thiết $v'_{21} \perp$ thành xe

Từ hình vẽ $v'_{2x} = v'_{1x}$

$$(m_1 + m_2)\, v_{1x} = m_1 v_{1x}' + m_2 v'_{2x} = (m + m_2) v'_{1x}$$

Vậy : $v'_{1x} = v_{1x} = 1m/s$

Xe vẫn có vận tốc 1m/s.

2.23.

Định luật bảo toàn động lượng :

$$\vec{0} = M\overrightarrow{v'_1} + m_2 \overrightarrow{v_2}$$

Định luật bảo toàn cơ năng :

$$m_1gh_1 = m_1g(h_1 - l) + m_2gh_2 + \frac{m_1v_1^2}{2} + m_2\frac{v_2^2}{2}$$

$$m_1gl = m_1\frac{v_1^2}{2} + m_2\frac{v_2^2}{2} \qquad (1)$$

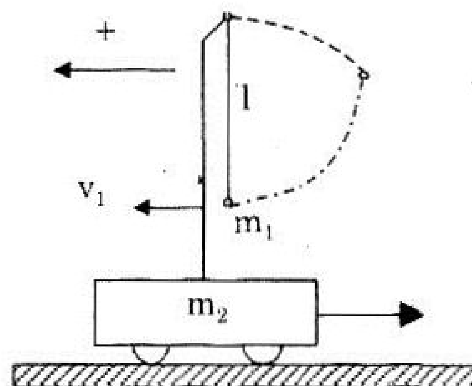
Từ (1), ta có : $\overrightarrow{v_2} = \frac{m_1}{m_2}\overrightarrow{v_1}$

$$v_2^2 = \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 v_1^2$$

$$m_1gl = m_1\frac{v_1^2}{2} + m_2\frac{m_1^2}{m_2^2}\cdot\frac{v_1^2}{2}$$

$$2gl = v_1^2 + \frac{m_1}{m_2} + v_1^2$$

$$2gl = v_1^2 + \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)$$



Chọn chiều dương như hình vẽ, ta có :

$$v_1 = \sqrt{\frac{m_1gl}{m_1 + m_2}}$$

$$v_2 = -\frac{m_1}{m_2}v_1$$

2.24.

1. Gọi v_1 là vận tốc m lúc đáp lên tấm ván, và v là vận tốc của ván mang vật m lúc m đã đứng yên so với ván

$$\frac{mv_1^2}{2} = mgh$$

$$v_1 = \sqrt{2gh}$$

Từ định luật bảo toàn động lượng

$$mv_1 = (m + M)\,v$$

$$V = \frac{m}{M + m}\sqrt{2gh} \qquad (1)$$

Công của lực ma sát bằng biến thiên động năng của hệ.

$$A = (m + M)\frac{v^2}{2} - m\frac{v_1^2}{2}$$

$$A = \frac{m + M}{2}\,\frac{m^2}{(m + M)^2}\,2gh - mgh$$

$$A = -\frac{Mmgh}{m + M}$$

2. Kết quả này không phụ thuộc vào cách chọn hệ quy chiếu.

2.25.

a) Biến thiên cơ năng bằng công của lực ma sát chọn mốc thế năng ở mặt nằm ngang BC

$$E_C - E_A = A_{ms}$$

$$-\,mgh = -\,KP\cos\alpha.S_1 - KP.S_2$$

$$-\,mgh = -\,Kmg.l_1 - \;Kmg.l_2$$

$$A = -\frac{h}{l_1 + l_2}.$$

b) Ta lại có : $E_A - E_C = A_{ms}$

Từ câu a, ta có : $A_{ms} = -\,mgh$

$$mgh + \frac{mv_A^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -mgh$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = 2mgh + \frac{mv_A^2}{2}$$

Để có mặt ở A thì $\frac{mv_A^2}{2} \geq 0$.

Ta có : $v_0 \geq 2\sqrt{gh}$.

2.26.

1. Theo định luật bảo toàn cơ năng, khi m đứng yên, lò xo giãn 1 đoạn, Δl_0, ta có :

   Chọn mốc thế năng trọng lực ngay tại mặt bàn.

$$\frac{1}{2}K\Delta l_0^2 = F.\Delta l_0 \rightarrow \Delta l_0\left[\frac{K\Delta l_0}{2} - F_0\right] = 0$$

   Ta có : $\Delta l_{01} = 0$

   hoặc $\Delta l_{02} = \frac{2F_0}{K} = \frac{2}{100} = 0{,}02 \text{ (m)}$

   Khi đó lực đàn hồi gấp đôi F_0, hoặc lò xo chưa biến dạng.

2. Khi có cân bằng lực, lò xo giã n 1 đoạn Δl

   Ta có : $\Delta l = \frac{2F_0}{K}$ (1)

   Theo định luật bảo toàn cơ năng :

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}K\Delta l^2 = A_{\text{ngoại lực}} = F_0.\Delta l \quad (2)$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}K\Delta l^2 = K\Delta l^2$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}K\Delta l^2 = \frac{1}{2}K\left(\frac{F_0}{K}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{F_0^2}{K}$$

$$v = \frac{F_0}{\sqrt{mK}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \approx 0{,}318\ \frac{m}{s}.$$

2.27. * Chọn mốc tính thế năng ở vị trí thấp nhất

Khi vật ở li độ x bất kỳ, cơ năng là :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mgl(1 - \cos)$$

Tại vị trí thả ban đầu :

$$E_0 = mgl(1 - \cos_m)$$

Theo định luật bảo toàn cơ năng : $E = E_0$

Suy ra : $\sqrt{2gl(\cos\alpha - \cos\alpha_0}$ (1)

Tại vị trí bất kỳ :

$$T - P\cos\alpha = F_n = \frac{mv^2}{R} = \frac{mv^2}{l}$$

Suy ra : $T = mg\cos\alpha + \frac{m}{l}2gl(\cos\alpha - \cos\alpha_0)$

$$T = mg(3\cos\alpha - 2\cos\alpha_0) \quad (2)$$

a) Khi $\alpha = 30^0$: $v = \sqrt{2.10.1\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)} = \sqrt{10(\sqrt{3-1})}\ \left(\frac{m}{s}\right)$

Khi $\alpha = 0^0$: $v = \sqrt{2.10.1\left(1 - \frac{1}{2}\right)} = \sqrt{10}\ \left(\frac{m}{s}\right)$

b) Khi $\alpha = 30^0$: $T = mg.(3\cos 30^0 - 2\cos 60^0)$

$$0{,}1.10.\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - 1\right) = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - 1\right) \quad \text{(IV)}$$

Khi $\alpha = 0^0$: $T = mg(3 - 1) = 2mg = 2.$ (IV)

2.28.

a) Gọi v_0 là vận tốc m_1 trước va chạm, $v_0 = \sqrt{2gh}$

Ta có hai phương trình : $m_1v_0 = m_1v_1 + m_2v_2$ (1)

$$m_1\frac{v_0}{2} = m_1\frac{v_1^2}{2} + m_2\frac{v_2^2}{2} \quad (2)$$

Giải hệ (1), (2) ta có : $v_1\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_0 = -\frac{1}{2}\sqrt{2gh}$

$$v_2\frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_0 = \frac{1}{2}\sqrt{2gh}$$

Sau va chạm lần đầu, cả hai cùng lên đến độ cao :

$$h_1 = h_2 = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{h}{4}.$$

b) Va chạm không đàn hồi : $v_1 = v_2 = v = \frac{m_1}{m_1 + m_2}v_0 = \frac{\sqrt{2gh}}{4}$

Chúng coi như một vật và nâng đến độ cao :

$$h_{12}\frac{v_2}{2g} = \frac{h}{16}$$

2. Lần thứ hai, chúng lại va chạm nhau, xuyên tâm, đàn hồi

Ta nhớ rằng, trong phần a, có hai cặp vận tốc nghiệm đúng là:

$$\begin{cases} v_1 = v_0 \\ v_2 = 0 \end{cases} \quad (a) \qquad \text{và} \qquad \begin{cases} v_1 = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0 \\ v_2 = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} v_0 \end{cases} \quad (b)$$

Trong đó cặp nghiệm (a) là hai vận tốc trước va chạm lần thứ 2, vận tốc trước va chạm là $- v_1$, v_2 nên sau va chạm sẽ là $v_2 = 0$, $v_1 = -v_0$, do đó m_2 ở vị trí âm = m_1 lên độ cao h.

2.29.

1. * Giả sử qua được B. Tại B ta có : $P + Q = F_n$;

do $Q \geq 0$ nên $P \leq F_n$;

$$mg \leq m\frac{v^2}{R}$$

$$v^2 \geq gR \qquad (1)$$

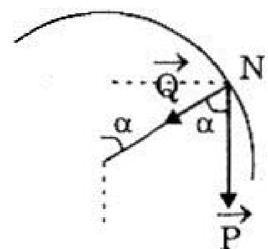
$$v^2 = 2g\,(h - 2R) \qquad (2)$$

* Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng :

$$mgh = mg.2R + \frac{mv^2}{2}$$

Từ (1), (2) ta suy ra : $h \geq 2,5R$.

2a) Tại N bất kỳ



$$Q + P\cos\alpha = F_n = \frac{mv^2}{R}$$

Vị trí mà vật rời quỹ đạo tròn Q = 0

$$mg\cos\alpha = m\frac{v^2}{R}$$

$$\cos\alpha = \frac{v^2}{gR} \qquad (3)$$

Theo định luật bảo toàn cơ năng :

$$mg2R = MgR(1 + \cos\alpha) + \frac{mv^2}{2}$$

$$v^2 = 2gR\,(1 - \cos\alpha) \qquad (4)$$

Khử v^2 nhờ (3) :

$$gR\cos\alpha = 2gR\,(1 - \cos\alpha)$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{3}$$

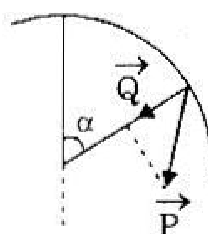
Vị trí vật rời quỹ đạo tròn có độ cao $h = \frac{5}{3}R$ (tính mốc là điểm A).

b) Kể từ vị trí tách máng tròn, vật được ném lên với vận tốc đầu v_0, góc nghiêng α.

Độ cao cực đại tính từ điểm xuất phát là :

$$h_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}; \qquad \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = \frac{5}{9}$$

$$v_0^2 = 2gR\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}gR$$



$$h_{max} = \frac{\frac{3}{2}gR.\frac{5}{9}}{2g} = \frac{5}{27}R$$

Tính từ điểm thấp nhất là A, độ cao đạt được là

$$H = \frac{5}{3}R + h_{max} = \left(\frac{5}{9} + \frac{5}{27}\right)R = \frac{50}{27}R.$$

c) Tại vị trí bất kỳ lực hướng tâm là :

$$F_n = P_{cos\alpha} + Q$$

$$Q = F_n - P_{cos\alpha}$$

$$Q = \frac{mv^2}{R} - mg\cos\alpha \qquad \text{thay } v^2\text{, lấy từ (4)}$$

$$Q = \frac{m}{R}2gR(1 - \cos\alpha) - mg\cos\alpha \quad \text{thay } v^2\text{, lấy từ (4)}$$

$$Q = mg\,(2 - 3\cos\alpha)$$

Tại C : $\alpha = 90^0$, $Q_1 = 2mg$.

Tại A: $\alpha = 180^0$, $Q_2 = 5mg$.

Tại E: $\alpha = 135^0$, $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $Q_3 = mg\,(2 + 3\sqrt{2})$.

2.30.

1. Chọn chiều dương là chiều của $\overrightarrow{v_1}$, ta có :

$$m_1v_1 = (m_1+m_2)v'$$

$$v' = \frac{m_1}{m_1 + m_2}v_1 = \frac{1}{4}\ \frac{m}{s}$$

Ngay lần bị ném thứ nhất, lò xo bị ném một đoạn Δl_0

$$\frac{1}{2}K\Delta l_0^2 = (m_1 + m_2)\frac{v'^2}{2}$$

$$\Delta l_0^2 = v'\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{K}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{0,4}{100}} = \frac{\sqrt{0,4}}{40} m \cong 1,55$$

Sau đó đến vị trí cân bằng, m_1 rời ra, chỉ còn lại m_2 dao động lò xo sẽ bị ném, dãn các đoạn cực đại lúc ở vị trí trong và ngoài cùng.

$$|\Delta l| = v'\sqrt{\frac{m_2}{K}} = \frac{\sqrt{0,3}}{40}(m) \cong 1,375(cm)$$

$$l_{min} = l_0 - \Delta l_0 = 28,45 \text{ cm}$$

$$l_{max} = l_0 + \Delta l = 31,375 \text{ cm}$$

2. Chọn chiều dương như hình vẽ, từ hai định luật bảo toàn, ta có hệ :

$$m_1v_1 = m_1v_1' + m_2v_2'$$

$$m_1\frac{v_1^2}{2} = m_1\frac{v_1'^2}{2} + m_2\frac{v_2'^2}{2}$$

Ta được hai họ nghiệm :

$$\begin{matrix} v_1' = v_1 = 1m/s \\ v_2' = 0 \end{matrix} \quad \text{và} \quad \begin{cases} v_1' = -\dfrac{1}{2} m/s \\ v_2' = \dfrac{1}{2} m/s \end{cases}$$

m_1 bật trở lại và đi ra vô cùng.

m_2 dao động; độ biến dạng cực đại của lò xo khi m_1 đứng yên ở hai bên

$$\frac{1}{2}K\Delta l^2 = \frac{1}{2}m_2v'_2$$

$$\Delta l = \pm v'_2\sqrt{\frac{m_2}{K}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{0,3}{K}} = \pm\frac{\sqrt{0,3}}{20} = \pm 2,75cm$$

$$l_0 - \Delta l \le l \le l_0 + \Delta l$$

$$7,25 \text{ (cm)} \le l \le 32,75 \text{ (cm)}.$$

2.31.

1. Chọn chiều dương là chiều chuyển động ban đầu của xe

Gọi v là vận tốc của hệ xe + vật, khi vật nằm yên trên sàn xe.

$$(M + m)v = Mv_0$$

$$V = \frac{Mv_0}{M + m} = \frac{10}{11}\left(\frac{m}{s}\right)$$

Vật m chuyển động nhanh dần đều

Do lực phát động là lực ma sát trượt,

$$a_2 = +kg = +1\ m/s^2$$

Xe M chuyển động chậm dần đều, do lực tổng hợp là lực cản của ma sát trượt.

$$a_1 = -\frac{Kmg}{M} = -0{,}1\ \frac{m}{s^2}$$

Thời gian $t = \frac{V}{a_2} = \frac{10}{11}$ (s).

2. Xe đi được : $S_1 = \overrightarrow{v_1}.t = \frac{v_0 + V}{2} t = \left(1 + \frac{10}{11}\right).\frac{5}{11} = \frac{105}{121}$ (m)

Vật đi được : $S_2 = \left(\frac{0 + v}{2}\right).t = \frac{5}{11}.\frac{10}{11} = \frac{50}{121}$ (m)

Vật trượt trên xe một đoạn :

$$l = S_1 - S_2 = \frac{55}{121} = \frac{5}{11} \text{ (m).}$$

3.a) Công của lực ma sát :

$$A_{ms} = F_{ms}.l = -Kmg.l = -0{,}1.1.10.\frac{5}{11} = -\frac{5}{11} \text{ (Jun).}$$

b) Tính từ định luật bảo toàn :

Chọn mốc tính thế năng là sàn xe

Cơ năng ban đầu :

$$E_0 = M\frac{v_0^2}{2} = \frac{10.1}{2} = 5 \text{ (J)}$$

Cơ năng của hệ khi (m + M) có cùng vận tốc :

$$E = (M + m)\frac{v_2}{2} = \frac{11}{2}\frac{100}{121} = \frac{50}{11} \text{ (J)}$$

Theo định luật biến thiên cơ năng

$$A_{ms} = \Delta E = E - E_0 = \frac{50}{11} - 5 = -\frac{5}{11} \text{ (J).}$$

2.32. Vận tốc : $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (10t - 1, 6t^2, -3)$m/s.

Xung lượng: $\vec{p} = m.\vec{v} = (5t - 0{,}5, 3t^2, -1{,}5)$ kgm/s.

Gia tốc: $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = (10,\ 12t,\ 0)m/s^2$.

Lực tác dụng lên hạt:

$$\vec{F} = m.\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt} = (5,\ 6t,\ 0)N.$$

Công suất: $P = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{mv^2}{2}\right) = \vec{F}\vec{v} = (36t^3 + 50t - 5)\ W.$

2.33. Gia tốc của hạt tại thời điểm t:

$$\vec{a}(t) = \frac{\vec{F}(t)}{m} = (5t,\ t - 4,\ -2t^2)m/s^2.$$

Vận tốc của hạt tại thời điểm t:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(t')dt' = (2,\ 0,\ 1)\ m/s + \left(\frac{5}{2}t^2, \frac{t^2}{2} - 4t, -\frac{2}{3}t^3\right) m/s$$

$$= \left(\frac{5}{2}t^2 + 2, \frac{t^2}{2} - 4t, 1 - \frac{2}{3}t^3\right) m/s$$

Vị trí của hạt thời điểm t:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}(t)dt = (\frac{5}{6}t^3 + 2t + 5, \frac{1}{6}t^3 - 2t^2 + 2, t - \frac{t^4}{6} - 3)\ m.$$

2.34.

a) Loại trừ thời gian khỏi các phương trình chuyển động ta được:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Tức là phương trình elip lần lượt có các bán trục a và b.

b) Vận tốc : $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = (-a\omega\sin\omega t,\ b\omega\cos\omega t) = \left(-\dfrac{a}{b}\omega y, \dfrac{b}{a}\omega x\right)$,

từ đây động năng của hạt bằng :

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega^2}{2}\left(\frac{a^2}{b^2}y^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2\right)$$

c) Áp dụng định luật II động lực học ta tìm được lực:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = -m\omega^2 r.$$

Vậy phương trình chuyển động có dạng:

$$m\ddot{\vec{r}} = -m\omega^2 r,$$

tức là phương trình của dao động tử điều hoà.

d) Công của lực thực hiện lên hạt:

$$W = \int_{(a,0)}^{(0,b)} \vec{F}.d\vec{r} = -m\omega^2 \int_{(a,0)}^{(0,b)} \vec{r}\, d\vec{r} = -\frac{1}{2}m\omega^2 \int_{(a,0)}^{(0,b)} d(\vec{r}\,\vec{r})$$

$$= -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \Big|_{(a,0)}^{(0,b)} = \frac{1}{2}m\omega^2 (a^2 - b^2);$$

như vậy là bằng hiệu động năng :

$$W = E_k(0,b) - E_k(a,0).$$

Chú ý: Có thể tính tích phân trên bằng phương pháp khác, đặt biểu thức $\vec{r}(t)$ vào và tích phân theo thời gian.

e) Công toàn phần: $W_{tp} = \oint \vec{F}.\,d\vec{r} = 0$

f) Đúng, lực này là lực bảo toàn, suy ra từ kết quả e)

g) Vì $\vec{F}$ là lực bảo toàn, nên :

$$\vec{F} = -\text{grad } U, \quad \text{ở đây U là thế năng của hạt.}$$

Vậy ta được hệ phương trình :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -F_x = m\omega^2 x, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -F_y = m\omega^2 y,$$

từ đây suy ra : $U = \frac{1}{2}m\omega^2 (x^2 + y^2) + C$. Chọn U (0, 0) = 0, tức là chọn

C = 0, và cuối cùng ta có : $U = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$

h) Năng lượng toàn phần :

$$E = E_K + U = \frac{1}{2}m\omega^2\left(\frac{a^2}{b^2}y^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2 + x^2 + y^2\right) = \frac{1}{2}m\omega^2(a^2 + b^2).$$

Năng lượng này không phụ thuộc vào thời gian vì ở đây ta có chuyển động trong trường thế năng (không phụ thuộc trường sinh vào thời gian).

i) Momen xung lượng của hạt tính theo điểm (0, 0) bằng :

$$\vec{M} = \vec{r}\times\vec{p} = m.\omega\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ -\frac{a}{b}y & \frac{b}{a}x & 0 \end{vmatrix} = m\,\omega\left(\frac{b}{a}x^2 + \frac{a}{b}y^2\right)\vec{k} = m\omega ab\,\vec{k}.$$

Vectơ này không phụ thuộc vào vị trí vì chuyển động trong trường lực xuyên tâm thực hiện với mome xung lượng không đổi.

2.35. Nếu $\vec{F}$ là lực bảo toàn thì tồn tại hàm U(x, y, z) thoả mãn phương trình : $\vec{F} = -\,\text{grad}\,U$

tức $\frac{\partial U}{\partial x} = 2y - 2xz^2$, $\quad\frac{\partial U}{\partial y} = 2x + 6yz$, $\quad\frac{\partial U}{\partial z} = 3y^2 - 2x^2z$,

Từ các phương trình trên lần lượt suy ra :

$$U = 2xy - x^2z^2 + f_1\,(y,z),$$
$$U = 2xy + 3y^2z + f_2\,(x,z),$$
$$U = 3y^2z - x^2z^2 + f_3(x,y),$$

So sánh các kết quả trên ta thấy :

$$f_1(y,z) = 3y^2z,\ f_2(x,z) = -x^2z^2,\ f_3\,(x,y) = 2xy$$

Như vậy $U(x,y,z) = 2xy + 3y^2z - x^2z^2 + c.$

2.36. Cũng giải theo phương pháp của bài toán trên ta đi đến kết luận $\vec{F}$ không phải là lực bảo toàn. Còn công do lực này thực hiện trong 2 trường hợp a) và b) lần lượt bằng :

a) $$W_1 = \int_A^B \vec{F}d\vec{r} = \int_{-1}^{1} F_x dx = \int_{-1}^{1} x^2 z dx = 0, \quad \text{bởi vì} \quad z = 0$$

b) $$W_2 = \int_A^B \vec{F}d\vec{r} = \int_{A=0}^{B} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = \int_A^B F_y dy = \int_A^B - xydy$$

$$= -\int_{-\pi}^{0} \cos^2\varphi \sin\varphi d\varphi = -\frac{1}{3}\cos\varphi\Big|_{-\pi}^{0} = \frac{2}{3}.$$

2.37. Từ các hệ thức cho trong đầu bài có thể thiết lập đẳng thức:

$$\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) = 0.$$

Dễ thấy rằng các biểu thức trong các dấu ngoặc là đồng nhất với những thành phần của véctơ rot $\vec{F}$. Vậy đẳng thức trên tương đương với đẳng thức :

$$\text{rot}\,\vec{F} = 0.$$

Nếu trường là trường thế năng, thì lực:

$$\vec{F} = -\,\text{grad}U; \qquad \text{ở đây U là thế năng.}$$

Từ tính chất tổng quát của các hàm véc tơ ta biết rằng rot của gradien luôn luôn bằng không và điều này xác minh tính đúng đắn của định lý được phát biểu trong đầu bài.

Cũng có thể phát biểu định lý đảo như sau:

Nếu trong một trường nào đó các hệ thức cho trong đầu bài đều thoả mãn, tức rot $\vec{F} = 0$, thì trường đó là trường thế năng.

2.38. Năng lượng toàn phần của chất điểm:

$$E = \frac{M^2}{2mr^2} - \frac{am}{r^n} + \frac{m\dot{r}^2}{2}$$

ở đây M là momen xung lượng. Tại qũy đạo ổn định năng lượng phải có giá trị cực tiểu, bởi vậy phải thoả mãn các hệ thức:

$$\frac{\partial E}{\partial r} = 0 \text{ và } \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} > 0.$$

Đạo hàm hai lần biểu thức năng lượng ta được:

$$\frac{\partial E}{\partial r} = -\frac{M^2}{mr^3} + amn\frac{1}{r^{n+1}},$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} = 3\frac{M^2}{mr^4} - amn(n+1)\frac{1}{r^{n+2}}.$$

So sánh đạo hàm bậc 1 với không ta tìm được:

$$\frac{M^2}{mr^3} = amn\frac{1}{r^{n+1}}.$$

Kết hợp kết quả này với biểu thức của đạo hàm bậc 2 lớn hơn 0 ta đi đến bất đẳng thức:

$$3amn\frac{1}{r^{n+2}} - amn(n+1)\frac{1}{r^{n+2}} > 0$$

Từ đây suy ra : $3 - (n+1) > 0$ hay là $n < 2$.

2.39.

1. Vì $\vec{F} = -\dfrac{\partial U}{\partial \vec{r}} = -\dfrac{\partial U}{\partial r}.\dfrac{\vec{r}}{r}$, do đó ta suy ra:

a) $U_1 = \dfrac{\alpha}{3r^3}$, b) $U_2 = -\dfrac{1}{3}\alpha r^3$, c) $U_3 = \dfrac{\alpha}{r}$.

2. Đạo hàm các thế năng trên ta được:

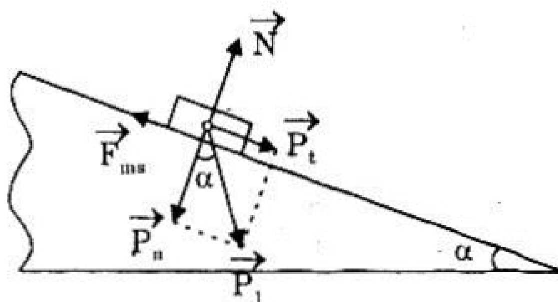
a) $\vec{F_1} = \left(\dfrac{\alpha_1}{r^2} + \dfrac{\alpha_2}{r^3}\right)\dfrac{\vec{r}}{r}$, b) $\vec{F_2} = \alpha\sin(\pi r).\dfrac{\vec{r}}{r}$, c) $\vec{F_3} = -\alpha.\dfrac{\vec{r}}{r}$.

2.40. Khi bay trong quỹ đạo, lực ly tâm bằng: $\vec{F} = m\vec{a} = m\dfrac{v^2}{\vec{r}}$

trong đó $\vec{v}$ là vận tốc của con tàu và r là bán kính quỹ đạo tính từ tâm quả Đất. Nhà du hành mất trọng lượng chỉ khi về giá trị lực này bằng lực hút của quả Đất, tức là khi g = a, nhưng hướng ngược chiều nhau.

Bài toán này thường dẫn đến sự hiểu nhầm ví dụ có người thường lập luận rằng "Bởi vì mặt Trăng (hoặc mặt Trời) hút nhà du hành" (?!) hoặc "Vì lực hút của quả Đất đã trở nên quá nhỏ"(??) v.v...

2.41.



a) Vật trượt trên mặt phẳng nghiêng dưới tác dụng của ba lực: trọng lực $\vec{P} = m\vec{g}$ phản lực pháp tuyến $\vec{N}$ và lực ma sát $\vec{F_{ms}}$ hướng ngược chiều chuyển động (hình).

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F_{ms}} \quad (1)$$

Có thể phân tích $\vec{P}$ thành hai thành phần $\vec{P_t}$ và $\vec{P_n}$

$$\vec{P} = \vec{P_t} + \vec{P_n}$$

Trong đó $\vec{P_t}$ nằm dọc theo mặt phẳng nghiêng $\vec{P_n}$ nằm vuông góc với mặt phẳng nghiêng. Thành phần $\vec{P_n}$ này triệt tiêu phản lực pháp tuyến $\vec{N}$. Do đó (1) viết lại thành:

$$\vec{F} = \vec{P_t} + \vec{F_{ms}} \quad (2)$$

Vì $\vec{P_t}$ và $\vec{F_{ms}}$ cùng phương nhưng ngược chiều nhau, nên về trị số $F = P_t - F_{ms}$, trong đó:

$$P_t = P\sin\alpha = mg\sin\alpha$$

$$F_{ms} = fP_n = fP\cos\alpha = fmg\cos\alpha$$

Do đó: $F = mg(\sin\alpha - f\cos\alpha)$ (3)

Để vật có thể trượt trên mặt phẳng nghiêng lực phải thoả mãn điều kiện:

$$F \geq 0, \quad \text{do đó} \quad \sin\alpha \geq f\cos\alpha \quad \text{hay} \quad f \leq tg\alpha$$

Vậy giới hạn của hệ số ma sát f (giá trị lớn nhất của f) để vật có thể trượt trên mặt phẳng nghiêng là:

$$f_{ng} = tg\alpha = tg4^0 = 0,07 \qquad (4)$$

b) Khi vật trượt trên mặt phẳng nghiêng, gia tốc của vật bằng

$$a = \frac{F}{m} = \frac{mg(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{m} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha) \qquad (5)$$

Với $f = 0,03$; $\sin\alpha \approx 0,07$; $\cos\alpha \approx 1$

Vậy : $a = 9,8\,(0,07 - 0,03.\,1) = 0,39\ m/s^2$ (6)

Từ phương trình chuyển động $s = \frac{1}{2}at^2$ (vì $v_0 = 0$), ta tính được thời gian để vật đi hết quãng đường s = 100m:

$$t = \left(\frac{2s}{a}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2.100}{0,39}\right)^{\frac{1}{2}} = 22,7s.$$

c) Vận tốc của vật ở cuối quãng đường 100 m:

$$v = at = 0,39.\ 22,7 = 8,85\ m/s.$$

2.42.

a) Lực tổng hợp đặt lên hệ :

$$\vec{F} = \vec{P_A} + \vec{P_B} + \vec{N} + F_{ms} \qquad (1)$$

Trong đó $\vec{P_A}$, $\vec{P_B}$ là các trọng lực đặt lên A và B, $\vec{N}$ là phản lực pháp tuyến của mặt bàn lên vật B; $\overrightarrow{F_{ms}}$ là lực ma sát đặt lên vật B. Chiếu lực tổng hợp $\vec{F}$ lên mặt phương chuyển động (ứng với các vật) và chọn chiều dương là chiều chuyển động ta được:

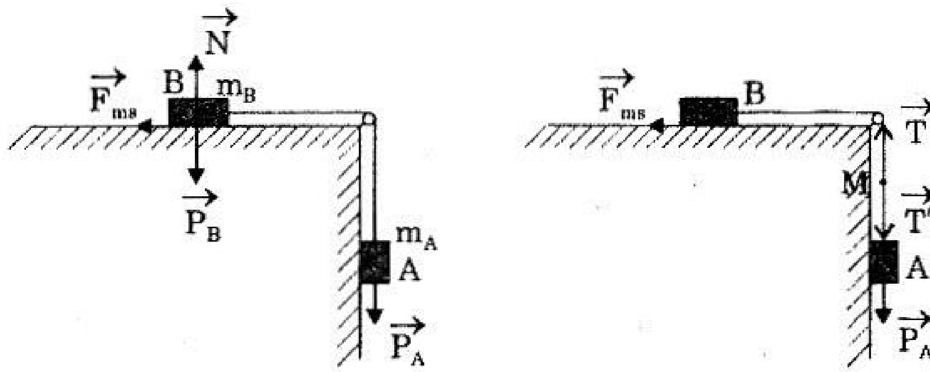
$$\vec{F} = \vec{P}_A - F_{ms} = g(m_A - fm_B) \quad (2)$$

Khối lượng của toàn hệ: $m = m_A + m_B$

Từ đây suy ra, theo định luật Newton II, gia tốc của hệ bằng:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{g(m_A - fm_B)}{m_A + m_B} = 4{,}4 \text{ m/s}^2 \quad (3)$$

b) Để tính lực căng của dây tại M ta tưởng tượng cắt dây tại đó. Muốn cho hai vật A, B vẫn chuyển động với gia tốc a như cũ ta phải tác dụng lên hai nhánh của vật ở M những lực căng $\vec{T}$ và $\vec{T'}$. Xét riêng vật A lực tác dụng lên nó gồm $\vec{P}_A$ và $\vec{T}$.



Áp dụng định luật Newton II cho vật A, ta có:

$$m_A.\vec{a} = \vec{P}_A + \vec{T} \quad (4)$$

hay về trị số :

$$m_A.a = P_A - T \quad (5)$$

Từ đó suy ra:

$$T = P_A - m_A a = m_A(g - a) = \frac{m_A m_B(1 + f)g}{m_A + m_B}$$

Tương tự, nếu xét riêng vật B ta có:

$$T' - F_{ms} = m_B a$$

Vậy : $$T' = m_B(fg + a) = m_B\left(fg + \frac{m_A - fm_B}{m_A + m_B}g\right)$$

$$= \frac{m_A.m_B(1 + f)g}{m_A + m_B} \quad (6)$$

Vậy : $T = T' = 5{,}4$ N.

2.43. Gọi $\vec{F_t}$ là tổng hợp lực đặt lên vật, m là khối lượng của vật, v là vận tốc của vật ở cuối mặt phẳng nghiêng. Theo định lý về xung lượng (sau khi chiếu trên mặt phẳng nghiêng):

$$F_t t = m.v - mv_0 = mv, \ (v_0 = 0) \qquad (1)$$

Mặt khác (xem bài 2.10)

$$F_t = mg\,(\sin\alpha - f\cos\alpha) \qquad (2)$$

và có: $$l = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{v - v_0}{t}\right)t^2 = \frac{1}{2}vt \quad \text{hay} \quad v = \frac{2l}{t} \qquad (3)$$

Đặt (2) và (3) vào (1) ta có:

$$mg\,(\sin\alpha - f\cos\alpha)\,t = m.\frac{2l}{t}$$

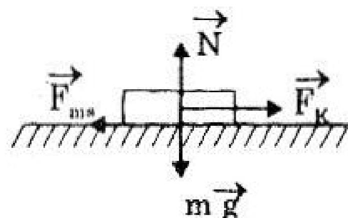
Vậy: $$t = \left[\frac{2l}{g(\sin\alpha - f\cos\alpha)}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{2.1,67}{9,8(\sin 30^0 - 0,2\cos 30^0)}\right]^{\frac{1}{2}} = 1s.$$

2.44. Nếu $\vec{a}$ là gia tốc phải truyền cho vật $\vec{A}$ theo phương nằm ngang, thì trong hệ quy chiếu không quán tính gắn liền với vật A điều kiện để các vật 1, 2 đứng yên là :

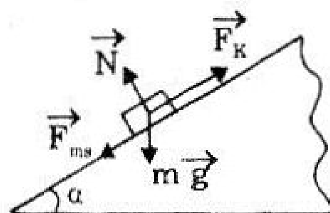
$$\left.\begin{aligned} T &= fmg + ma \\ mg &= T + fma \end{aligned}\right\}$$

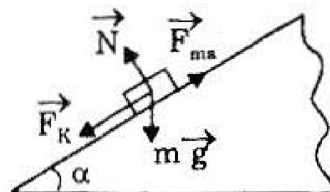
trong đó T là sức căng dây, giải hệ phương trình ta được: $a = \dfrac{g(1 - f)}{1 + f}$.

2.45.



Hình a





Hình b Hình c

a) Gọi $\vec{F_K}$ là lực kéo của động cơ ô tô (Hình a). Vì ô tô chuyển động đều trên đường nằm ngang nên tổng hợp lực đặt lên ô tô phải bằng không.

Từ đó:

$$F_k - F_{ms} = 0 \quad \rightarrow \quad F_k = F_{ms} = f.\,mg \qquad (1)$$

Vậy công suất của động cơ ô tô trong trường hợp này là:

$$P = F_k.\,v = F_{ms}.\,v = f.m.g.\,v \qquad (2)$$

$$P = 0{,}07.\,1000.\,9{,}8.\,10 = 6860\text{ w}.$$

b) Trường hợp ô tô chạy lên dốc. Cũng lý luận tương tự như trường hợp a), ta có:

$$F_K - (F_{ms} + mg\sin\alpha) = 0 \qquad (3)$$

với $F_{ms} = fmg\cos\alpha$

Do đó: $F_k = mg(f\cos\alpha + \sin\alpha)$ (4)

Vậy công suất của động cơ ô tô là:

$$P = F_k.\,v = mgv(f\cos\alpha + \sin\alpha) \qquad (5)$$

Vì α rất nhỏ nên coi $\cos\alpha \approx 1$

$$\rightarrow \quad P = 1000.9{,}8.10.(0{,}07 + 0{,}05) = 11760\text{ W}$$

c) Trường hợp ôtô chạy xuống dốc (Hình c)

$$F_k + mg\sin\alpha - F_{ms} = 0$$

hay là: $F_k = mg(f\cos\alpha - \sin\alpha)$ (6)

Công suất của động cơ ô tô là:

$$P = mgv(f\cos\alpha - \sin\alpha)$$

$$= 1000.9{,}8.10.(0{,}07 - 0{,}05) = 1960\text{ W} \qquad (7)$$

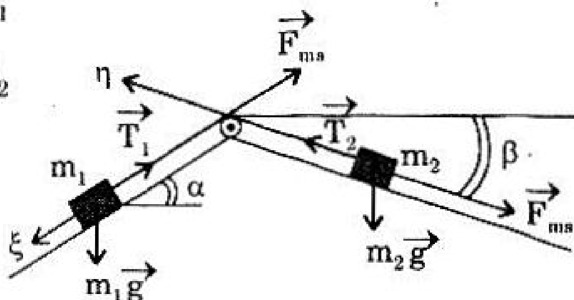
2.46. Có thể chỉ ra hướng chuyển động của vật m_1, m_2 nhờ so sánh các lực kéo. Các trục tọa độ ξ, η nên chọn song song với hướng chuyển động. Phương trình mô tả chuyển động của vật m_1 dọc trục ξ và m_2 dọc trục η (phương trình Newton) được viết như sau:

$$m_1a_1 = m_1.g.\sin\alpha - F_{ms}^{(1)} - T_1$$

$$m_2a_2 = m_2.g.\sin\beta - F_{ms}^{(2)} + T_2$$

với $F_{ms}^{(1)} = f.m_1.g.\cos\alpha$

$F_{ms}^{(2)} = fm_2.g.\cos\beta.$



Do sợi chỉ không co giãn:

$$a_1 = a_2 = a \qquad \text{(liên kết động hình học)}$$

Do sợi chỉ và ròng rọc không có khối lượng và có thể bỏ qua ma sát vào trục ròng rọc:

$$T_1 = T_2 = T \qquad \text{(liên kết động lực học)}$$

Thấy ngay từ hình vẽ rằng khối lượng m_1 hạ thấp độ cao so với m_2 sau thời gian t một khoảng là:

$$h = \frac{at^2}{2}(\sin\alpha + \sin\beta).$$

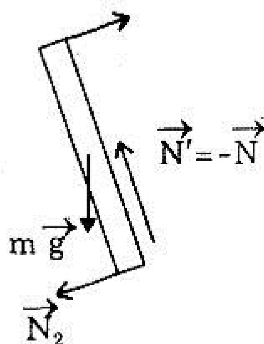
Giải hệ phương trình ban đầu tìm a ta xác định được:

$$h = \frac{gt^2}{2}\cdot\frac{(\sin\alpha + \sin\beta).[m_1(\sin\alpha - f\cos\alpha) - m_2(f\cos\beta + \sin\beta)]}{(m_1 + m_2)}$$

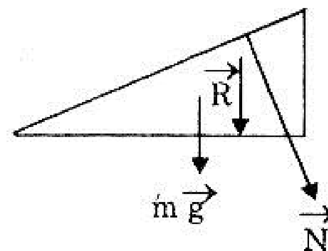
h = 0,65 m.

2.47. Lực tác dụng lên thanh A và cái nêm được vẽ như trên hình a và b.

a)



b)



Phương trình chuyển động của cái nêm theo phương nằm ngang và của thanh A theo phương vuông góc với mặt phẳng nghiêng được viết như sau:

$$Ma_1 = N\sin\alpha$$

$$Ma_2 = mg\cos\alpha - N$$

Từ hình vẽ ta có thể suy ra được sự phụ thuộc của a_1 vào a_2 (liên kết động hình học).

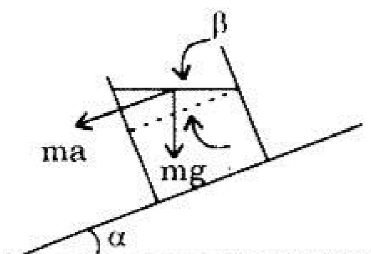
$$a_2 = a_1.\sin\alpha.$$

Giải hệ 3 phương trình ta tìm được : $a_1 = \dfrac{mg\cot g\alpha}{m + \dfrac{M}{\sin^2\alpha}} = 0{,}58\ m/s^2$.

2.48.

Gia tốc của nồi nước bằng:

$$a = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)$$



Do đó đối với mỗi phân tử nước có khối lượng m trên mặt nước chiếu của vectơ m.g lên chiều mặt nước phải bằng chiều của vectơ ma lên mặt nước, tức là:

$$mg\sin(\alpha - \beta) = mg(\sin\alpha - f\cos\alpha)\cos\beta$$

Ở đây β là góc giữa mặt nước và mặt dốc.

Từ đây ta được: $\text{tg}\beta = f$, tức là: $\beta = \text{arctg}f$.

2.49.

a) Từ các phương trình chuyển động: $ma = mg - F$; $Ma = F$

ở đây F là sức căng sợi dây, ta được: $a = \dfrac{m}{m + M}g$

Như vậy dưới ảnh hưởng của trọng lượng khỉ, hệ thực hiện chuyển động nhanh dần đều với gia tốc a hướng xuống dưới.

b) Tình hình không bị thay đổi, duy chỉ có khoảng cách giữa khỉ và khối lượng M ngắn lại dần.

c) Các phương trình chuyển động có dạng :

$$ma' = ma - ma_0 = mg - F$$

$$Ma = F$$

ở đây a' là gia tốc toàn phần của khỉ, a là gia tốc của khối lượng M. Từ đây ta thu được:

$$a' = \frac{mg - Ma_0}{M + m}, \quad a = \frac{m}{m + M}(g + a_0).$$

Giá trị $a' < 0$ nói lên rằng chuyển động của khỉ hướng dọc lên trên, tức là ngược chiều so với chuyển động của phần hệ còn lại.

2.50.

1. a) $a = \dfrac{mg - fMg}{m + M}$, b) như trên,

c) $a' = \dfrac{mg - Ma_0 - fMg}{M + m}$, $a = a' + a_0 = \dfrac{mg + ma_0 - fMg}{M + m}$.

2. a) $a = \dfrac{m - M}{m + M}g$, b) như trên,

c) $a' = \dfrac{mg - ma_0 - Mg}{m + M}$, $a = a' + a_0 = \dfrac{mg + ma_0 - Mg}{m + M}$.

2.51.

a) Ký hiệu khoảng cách AB bằng x, khi đó phương trình chuyển động có dạng:

$$mx = bx \quad \text{ở đây} \quad b > 0$$

Với các điều kiện ban đầu $x(0) = v_0$, $x(0) = 0$

Từ đây ta được: $x - \dfrac{b}{m}x = 0$

Nghiệm tổng quát của phương trình này có dạng:

$$x = c_1 e^{\alpha t} + c_2 e^{-\alpha t}, \qquad \text{ở đây} \qquad \alpha = \sqrt{\frac{b}{m}}$$

Từ các điều kiện ban đầu suy ra: $\quad c_1 = -c_2 \quad$ và $\quad c_1 = \dfrac{v_0}{2\alpha}$

Vậy cuối cùng $\quad x = \dfrac{v_0}{2\alpha}(e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}) = \dfrac{v_0}{\alpha}\sin(\alpha t).$

b) Bởi vì $F = bx$, vậy từ công thức $F = -\dfrac{dU}{dx}$ ta được: $\quad U = -\dfrac{bx^2}{2}$

Từ định luật bảo toàn năng lượng: $\quad E = \dfrac{mv^2}{2} - \dfrac{bx^2}{2} = \dfrac{mv_0^2}{2}$

Suy ra phương trình của vận tốc: $\quad v = \dfrac{dx}{dt} = \sqrt{v_0^2 + \alpha^2 x^2}\,.$

Từ đây ta được: $\displaystyle\int dt = \int \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 + \alpha^2 x^2}},$

hay là $\qquad \alpha t = \ln\left[\dfrac{\alpha}{v_0}\left(x + \sqrt{x^2 + \left(\dfrac{v_0}{\alpha}\right)^2}\right)\right]$

Giải phương trình này theo x ta được: $\quad x = \dfrac{v_0}{\alpha}\sin(\alpha t).$

2.52. $\quad x = \dfrac{v_0}{\alpha}\sin(\alpha t)$. $\quad$ Đây là dao động tử điều hoà.

2.53. Giả sử h là phần sợi dây treo thõng tự do, ta có phương trình:

$$m_l = \frac{d^2h}{dt^2} = m_h g$$

với các điều kiện ban đầu $h(0) = \dfrac{1}{4}l$ và $h(0) = 0$, ở đây m_l khối lượng toàn sợi dây, còn m_h– khối lượng của đoạn h. Vì giữa khối lượng và chiều dài sợi dây tồn tại hệ thức $\dfrac{m_l}{m_h} = \dfrac{l}{h}$ cho nên thay vào phương trình trên ta được:

$$\frac{d^2h}{dt^2} = \frac{h}{l}g$$

$$h(0) = \frac{1}{4}l$$

Nghiệm của phương trình trên chính là hàm:

$$h(t) = h(0)\cosh\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) = \frac{1}{4}l\cosh\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$$

Thay $h(t) = l$ vào ta được: $e^{\sqrt{\frac{g}{l.\tau}}} + e^{-\sqrt{\frac{g}{l.\tau}}} = 8$

Từ đây suy ra : $e^{\sqrt{\frac{g}{l.\tau}}} = 4 \pm \sqrt{15}$.

Loại bỏ nghiệm $4 - \sqrt{15}$ (vì t > 0), cuối cùng ta được: $t = \sqrt{\frac{l}{g}}\ln(4 + \sqrt{15})$.

2.54. Để chất điểm nằm yên phải thoả mãn điều kiện:

$$m.g.\sin\alpha \leq m.g.f\cos\alpha \quad \text{hay là} \quad tg\alpha \leq f$$

Trường hợp giới hạn: $tg\alpha = f$

Ta hãy ký hiệu tg góc nghiêng của tiếp tuyến đến parabol tại điểm $[x_0, y(x_0)]$ tại đấy hạt nằm yên:

$$tg\alpha = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 2\alpha x_0 = f,$$

từ đây $x_0 = \frac{f}{2a}$, và do đó $h_{max} = y(x_0) = ax_0^2 = \frac{f^2}{4a}$.

2.55. Trước khi rơi vào nước hòn đá chuyển động theo phương trình chuyển động:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg$$

Từ đây ta được: $v = v_0 + gt$, $x = v_0t + \frac{gt2}{2}$

Hòn đá rơi đến mặt nước tại thời điểm t_0, vậy $d = v_0t_0 + \frac{gt_0^2}{2}$.

Từ đây $t_0 = \frac{\sqrt{v_0^2 + 2gd} - v_0}{g}$.

Khi đó vận tốc hòn đá bằng: $v(t_0) = v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2gd}$

Phương trình chuyển động của hòn đá trong nước có dạng sau:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k\frac{dx}{dt} \quad \text{hay là} \quad \frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v$$

Ta đưa vào biến mới: $p = g - \frac{k}{m}v$, $\quad dp = -\frac{k}{m}dv$

và ta được phương trình vi phân : $\quad -\frac{m}{k}\frac{dp}{dt} = p.$

Tích phân theo phương pháp tách biến: $-\frac{m}{k}\int\frac{dp}{p} = \int dt$

ta được : $\ln p = -\frac{k}{m}t + C.$

Từ đây ta được: $\quad p = p_0 e^{-\frac{kt}{m}}$, $\quad p_0 = e^c$

Sau khi đặt $p = g - vk/m$ và $p_0 = g - v_1k/m$ ta tìm được:

$$v = \frac{m}{k}\left[g - \left(g - v_1\frac{k}{m}\right)\right]e^{-\frac{kt}{m}} = \frac{mg}{k} + \left(v_1 - \frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{kt}{m}}$$

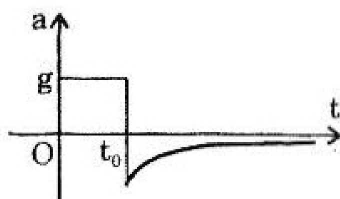
Tại đây ta đã xem $t = 0$ như thời điểm, khi hòn đá đạt đến mặt nước.

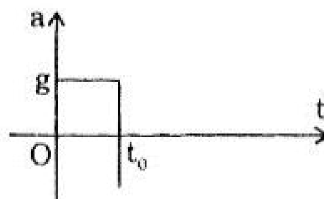
Sử dụng công thức này ta dễ dàng tìm được sự phụ thuộc của gia tốc và vị trí hòn đá vào thời gian:

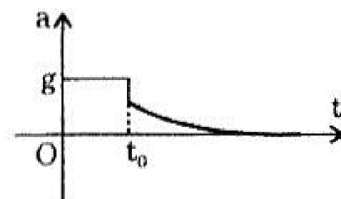
$$a = \frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v = \left(g - \frac{k}{m}v_1\right)e^{\frac{-kt}{m}}$$

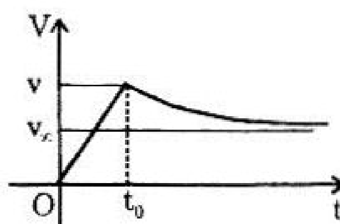
và $$x(t) = \int vdt + x_0 = \frac{mg}{k} + \frac{m}{k}\left(v_1 - \frac{mg}{k}\right)\left(1 - e^{\frac{-kt}{m}}\right) + d$$

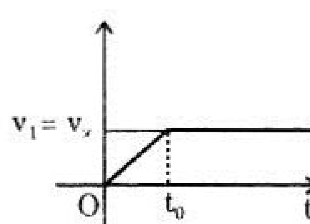
Ta chú ý rằng, khi $t \to \infty$ thì $a \to 0$, và khi đó $v \to v_\infty = \frac{mg}{k}$. Các hình a, b, c diễn tả sự phụ thuộc của vận tốc và gia tốc của hòn đá vào thời gian trong các trường hợp $v_1 > v_\infty$, $v_1 = v_\infty$, $v_1 < v_\infty$.

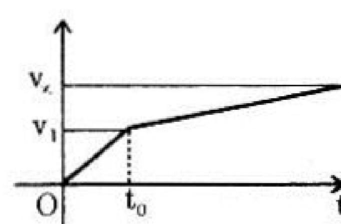












a) b) c)

Khoảng cách giữa 2 hòn đá:

$$D = v_\infty \left[T + \left(\frac{m}{k} - \frac{v_1}{g} \right) e^{-\frac{kt}{m}} \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}} \right) \right] \to v_\infty T \text{, khi } t \to \infty.$$

2.56. Phương pháp giải hoàn toàn giống như trong bài 24 và đưa đến kết quả.

$$x = \frac{m}{k} \left(\frac{mg}{k} + v_0 \right) \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}} \right) - \frac{mg}{k} t$$

Do đó sử dụng điều kiện: $v = \frac{dx}{dt} = 0,$

ta được giá trị của khoảng thời gian bay

$$t_1 = \frac{m}{k} \ln \left(1 + \frac{v_0 k}{mg} \right) = \frac{m}{k} \ln \left(1 + \frac{v_0}{v_\infty} \right)$$

và $$x_{max} = x(t_1) = \frac{m}{k} \left[v_0 - v_\infty \ln \left(1 + \frac{v_0}{v_\infty} \right) \right]$$

Nếu $v_0 << v_\infty$, hay là $F << mg$ thì ta có thể sử dụng khai triển của hàm lôga vào chuỗi lũy thừa.

$$\ln (1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

và nếu chỉ giữ lại số hạng thứ nhất thì khi đó

$$x_{max} = \frac{v_0^2}{2g} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{v_0}{v_\infty} \right), \quad t_1 = \frac{v_0}{g} \left(1 - \frac{v_0}{2v_\infty} \right).$$

2.57.

$$r(t) = \left\{ \frac{mv_0}{k} \cos\alpha \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}} \right), \frac{mv_0}{k} \sin\alpha \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}} \right) - \frac{mg}{k} \left[t + \frac{m}{k} \left(e^{-\frac{kt}{m}} - 1 \right) \right] \right\}$$

$$v(t) = \left[v_0 \cos\alpha e^{-\frac{kt}{m}}, v_0 \sin\alpha e^{-\frac{kt}{m}} - \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}} \right) \right]$$

$$t_1 = \frac{m}{k} \ln \left(1 + \frac{kv_0 \sin\alpha}{mg} \right)$$

$$x_{max} = \frac{mv_0 \sin\alpha}{k} - \frac{m^2 g}{k^2} \ln \left(1 + \frac{kv_0 \sin\alpha}{mg} \right).$$

2.58. Tại những vị trí có độ lệch cực đại, động năng của con lắc bằng không, nên ta có thể tìm ngay được năng lượng bị mất mát, bằng cách so sánh thế năng tại hai thời điểm t_0 và $t_0 + t$

$$E_1 = mgl\,(1 - \cos\alpha),$$

$$E_2 = mgl\,(1 - \cos\beta).$$

Do đó: $\Delta E = E_1 - E_2 = mgl(\cos\beta - \cos\alpha).$

2.59. $x = \dfrac{m}{k}\ln 2$.

2.60. Đối với $0 \le n < 1$ vật dừng lại sau khi đi được khoảng đường:

$s = \dfrac{m}{k(2-m)}v_0^{2-n}$ trong thời gian $T = \dfrac{mv_0^{1-n}}{k(1-n)}$; đối với $1 < n < 2$ vật không bao giờ dừng lại nhưng sau một thời gian dài vô tận vật đi được một quãng đường $s = \dfrac{m}{k(2-m)}v_0^{2-n}$; đối với $n > 2$ vật không bao giờ dừng lại, và quãng đường cũng dài vô hạn.

Chú ý: Cần phải xét riêng các trường hợp $n = 1$ và $n = 2$.

2.61. Giống như trong bài (24) tích phân phương trình chuyển động ta được:

$$v = v_0 e\, v_0 e^{\frac{-kt}{m}} + \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1\right)\frac{mg}{k}\left(e^{\frac{-kt}{m}} - 1\right)$$

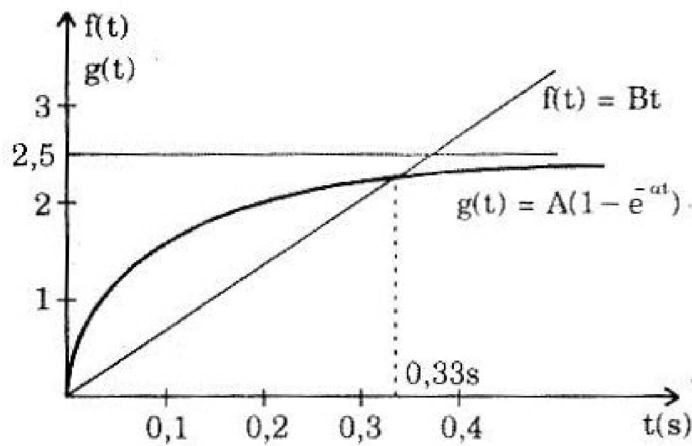
ở đây $v_0 = \sqrt{2gh_0}$

và $$x = \left[\frac{mv_0}{k} + \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1\right)\frac{m^2 g}{k^2}\right]\left(1 - e^{\frac{-kt}{m}}\right) - \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1\right)\frac{mg}{k}t$$

trong đó v và x lần lượt là vận tốc và vị trí của quả cầu sau thời gian t, ngoài ra tại đây điểm $x = 0$ nằm trên mặt chất lỏng.

Quả cầu trở lại mặt chất lỏng sau thời gian t_0, sao cho $x(t_0) = 0$ và tiếp đó lại nhảy lên khỏi mặt phẳng lên đến độ cao $h = \dfrac{[v(t_0)]^2}{2g}$. Vậy ở đây ta phải tìm t_0. Đặt $x = 0$ ta được phương trình dạng: $A(1 - e^{-\alpha t}) = Bt$.

Có thể giải phương trình này bằng đồ thị, nhưng trước tiên ta hãy khảo sát, khi nào phương trình có nghiệm. Đường thẳng $f(t) = Bt$ cắt đường cong $g(t) = A(1 - e^{-\alpha t})$ (hình) chỉ khi đạo hàm $g'(t)|_{t=0}$ lớn hơn đạo hàm $f'(t)|_{t=0}$, tức là khi thỏa mãn điều kiện $A\alpha > B$.



Trong trường hợp đang xét tại đây

$$\alpha A = v_0 + \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1\right)\frac{mg}{k}, \qquad B = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1\right)\frac{mg}{k}$$

Như vậy điều kiện đó đã thỏa mãn, sau khi thay các số liệu vào ta được phương trình:

$$5\,t = 2{,}25(1 - e^{-4t}).$$

Nghiệm đồ thị của phương trình cho kết quả $t_0 = 0{,}33$s. Tiếp đó ta thu được:

$$v(t_0) = 1{,}3\text{m/s}, \qquad h = 0{,}085\text{m}.$$

2.62. Lực điện trường tác dụng lên hạt có điện tích q:

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

Vậy phương trình Newton có dạng: $mr = q\vec{E}$

với các điều kiện ban đầu $\vec{r}\,(0) = 0$, $\vec{r}\,(0) = \vec{v}_0$.

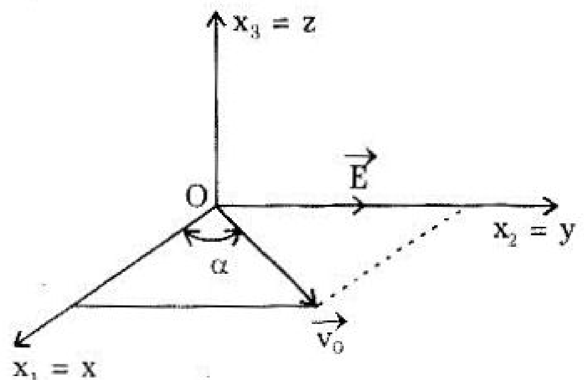
Trong hệ tọa độ đề các:

$$mx_i = qE_i, \qquad x_i(0) = v_{0i} \qquad x_i(0) = 0\ (i = 1, 2, 3)$$

(Tức tại đây ta hiểu $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$).

Không làm giảm tính tổng quát của lời giải ta có thể chọn hệ tọa độ, sao cho trục y hướng dọc theo chiều của $\vec{E}$ và véc tơ $\vec{v}_0$ nằm trong mặt phẳng xy. Khi đó các phương trình chuyển động có dạng đơn giản:

$$x = 0, \qquad x(0) = v_{0x}, \quad x(0) = 0,$$
$$y = qE/m, \quad y(0) = v_{0y}, \quad y(0) = 0,$$
$$z = 0, \qquad z(0) = 0, \quad z(0) = 0.$$



Ký hiệu góc giữa trục x và chiều của $\vec{v}_0$ bằng α, khi đó

$$v_{0x} = v_0\cos\alpha, \qquad v_{0y} = v_0\sin\alpha$$

Lấy tích phân hai lần theo thời gian và sử dụng các điều kiện ban đầu ta thu được:

$$\begin{cases} x = v_0\cos\alpha, \\ x = v_0\cos\alpha, \end{cases} \qquad \begin{cases} y = v_0\sin\alpha + \dfrac{q}{m}Et, \\ y = v_0\sin\alpha + \dfrac{qE}{2m}t^2, \end{cases} \qquad \begin{cases} z = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

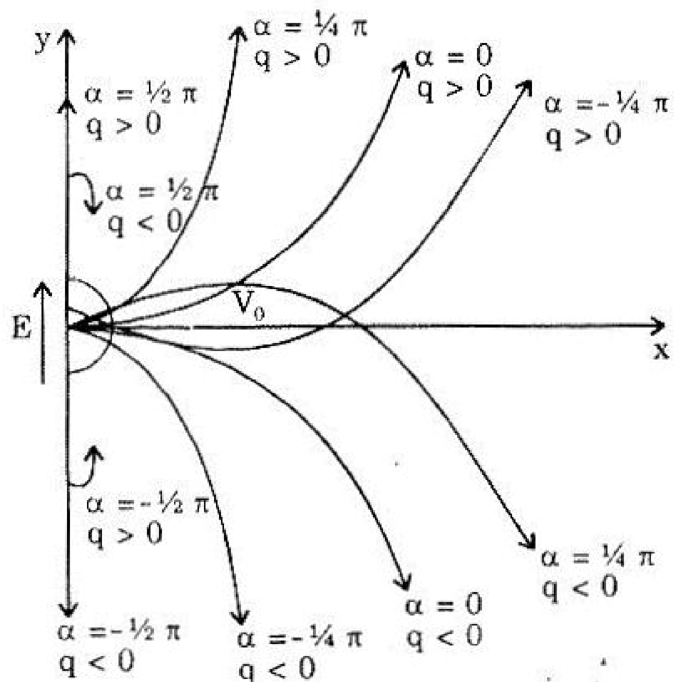
Như vậy chuyển động của hạt thực hiện trong mặt phẳng z = 0, tức trong mặt phẳng chứa $\vec{E}$ và $\vec{v_0}$ (đây là nghiệm tổng quát nhất, không phụ thuộc vào hệ tọa độ được chọn). Dọc theo $\vec{E}$ hạt chuyển động nhanh dần đều và theo chiều vuông góc đến $\vec{E}$ hạt thực hiện thẳng đều. Loại trừ thời gian khỏi các phương trình trên, ta được phương trình quỹ đạo:

$$y = xtg\alpha + x^2\frac{qE}{2mv_0^2}\left(1 + tg^2\alpha\right)$$

Đây là phương trình parabôn đi qua gốc hệ tọa độ, khi $\alpha = \pm\dfrac{\pi}{2}$ phương trình này chuyển về phương trình đường thẳng x = 0. Tọa độ của đỉnh parabôn lần lượt bằng:

$$x_d = -\frac{mv_0^2}{2qE}\sin 2\alpha, \qquad y_d = -\frac{mv_0^2}{2qE}\sin^2\alpha$$

Đối với các điện tích dương (q > 0) $Y_d < 0$, trái lại đối với q < 0 $Y_d > 0$. Hình bên trình bày quỹ đạo cho các giá trị góc α và các dấu khác nhau của điện tích hạt.



Sự thay đổi động năng của hạt:

$$\Delta E_k = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

$$= \frac{m}{2}(x^2+y^2-v_0^2)$$

$$= qE\left(\frac{qE}{2m}t^2 + v_0 t\sin\alpha\right)$$

$$= qEy = qU.$$

Như ta thấy độ gia tăng động năng của hạt tỷ lệ đến giá trị tọa độ theo

chiều điện trường (tọa độ y), tức đến hiệu điện thế giữa điểm khảo sát (hạt) với gốc hệ tọa độ.

Bởi vì tích qy đạt giá trị cực tiểu, khi $y = y_d$. Vậy tại đỉnh parabôn động năng của hạt cũng đạt giá trị cực tiểu và khi đó thế năng đạt cực đại, vì rằng điện trường mọi thay đổi động năng của hạt đều do sự chuyển hoá của thế năng và ngược lại.

2.63. Trong từ trường lực tác dụng lên hạt có điện tích q (lực lorentz) có dạng:

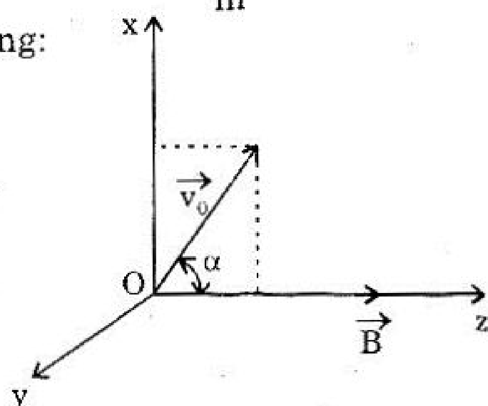
$$\vec{F} = q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$$

Các phương trình Newton tương ứng là: $m\vec{r} = q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$ với các điều kiện ban đầu $r = v_0$, $r_0 = 0$, hay theo từng tọa độ riêng biệt:

$$mx = q(v_yB_z - v_zB_y), \quad x(0) = v_{0x}, \quad x_0 = 0$$
$$my = q(v_zB_x - v_xB_z), \quad y(0) = v_{0y}, \quad y_0 = 0$$
$$mz = q(v_xB_y - v_yB_x), \quad z(0) = v_{0z}, \quad z_0 = 0$$

Ta chọn hệ tọa độ để sao cho trục z song song với $\vec{B}$, trái lại véc tơ $\vec{v_0}$ nằm trong mặt phẳng xz (hình) và đưa vào ký hiệu $\frac{qB}{m} = \omega$. Khi đó các phương trình chuyển động chuyển về dạng:

$$x = \omega y, \quad x(0) = v_{0x}, \quad x_0 = 0,$$
$$y = -\omega y, \quad y(0) = v_{0x}, \quad y_0 = 0,$$
$$z = 0, \quad z(0) = v_{0z}, \quad z_0 = 0,$$



Ký hiệu góc giữa trục z và v_0 bằng α, khi đó:

$$v_{0X} = v_0\cos\alpha, \quad v_{0Z} = v_0\sin\alpha.$$

Từ các phương trình chuyển động suy ra rằng dọc theo trục 0z (song song với B) không có lực tác dụng lên hạt. Vậy dọc theo trục này (theo định luật I Newtơn) hạt sẽ thực hiện chuyển động đều với vận tốc $z = z(0) = v_0\cos\alpha$, do đó $z = v_0t\cos\alpha$.

Để tích phân hai phương trình đầu ta đưa vào đây một biến mới $\xi = x + iy$ mô tả vị trí của hạt nằm trên mặt phẳng vuông góc đến trục z, modun của biến này bằng $\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}}$ là khoảng cách của hạt đến trục z, trái lại đối số của ξ bằng $\text{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ là góc cực trong mặt phẳng này, hiển nhiên $\xi = x + iy$ và $\xi = x + iy$.

Nếu nhân phương trình thứ hai với i và cộng vào phương trình thứ nhất ta được phương trình vi phân của biến ξ:

$$\dot{x} + i\dot{y} = \omega(y - ix) = -i\omega(x + iy)$$

hay là $\quad \dot{\xi} = \frac{d\xi}{dt} = -i\omega\xi$ với các điều kiện ban đầu $\xi = v_0\sin\alpha$, $\xi(0) = 0$.

Tích phân lần đầu của phương trình này theo t:

$$\int\frac{d\xi}{\xi} = -i\omega\int dt, \quad \text{ta được:} \quad \ln\xi = -i\omega t + C$$

Từ đây $\quad \xi = e^c e^{-i\omega t} = \xi(0)e^{-i\omega t} = v_0\sin\alpha.\ e^{-i\omega t}$.

Do đó: $\quad \dot{x} = \mathrm{Re}\,\xi = v_0 \sin\alpha \cos\omega t,$

$$\dot{y} = \mathrm{Im}\,\xi = -v_0 \sin\alpha \sin\omega t$$

Tích phân các phương trình trên một lần nữa ta thu được:

$$x = \frac{v_0}{\omega}\sin\alpha\sin\omega t = a\sin\omega t$$

$$y = \frac{v_0}{\omega}\sin\alpha(\cos\omega t - 1) = a(\cos\omega t - 1)$$

Loại trừ thời gian khỏi chúng ta được phương trình quỹ đạo:

$$x^2 + (y + a)^2 = a^2$$

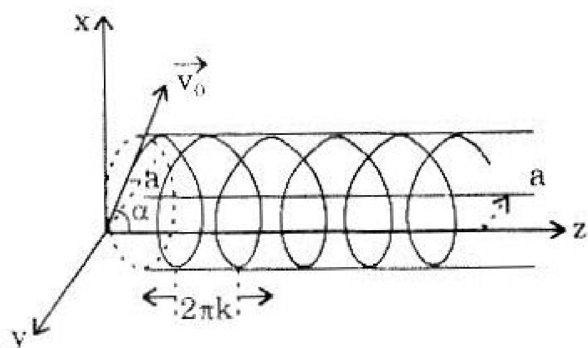
Như ta thấy đây là một vòng tròn có bán kính $r = |a|$ và tâm đặt tại điểm có tọa độ $x = 0$, y–a. Chuyển động theo vòng tròn này là chuyển động đều, vì vận tốc

$$(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2} = v_0\sin\alpha$$

không phụ thuộc vào thời gian, tham số $\omega = \frac{v_0 \sin\alpha}{a}$ là vận tốc góc của chuyển động (tức là tần số xyclôtron). Kết hợp với chuyển động dọc theo trục z và giả sử đặt $\varphi = -\arg\xi = \omega t$, khi đó ta được các phương trình quỹ đạo trong không gian 3 chiều như sau:

$$x = a\sin\varphi, \quad y = a(\cos\varphi - 1), \quad z = k\varphi,$$

ở đây $k = v_0\cos\alpha/\omega$.



Hệ phương trình trên mô tả đường xoắn ốc lò so, trục của nó là đường thẳng song song với trục z và qua điểm ($x = 0$, $y = -a$), khoảng cách giữa các vòng kề nhau bằng $2\pi k$. Khi $\alpha = 0$ đường xoắn ốc chuyển thành đường thẳng và hạt thực

hiện chuyển động thẳng đều dọc trục z; trái lại, khi $\alpha = \pm \pi/2$, $k = 0$ tức khi đó hạt chuyển động theo vòng tròn bán kính $r = \left|\frac{v_0}{\omega}\right|$ trong mặt phẳng $z = 0$. Chiều tiến chuyển của đường xoắn ốc và vị trí của nó trực tiếp phụ thuộc vào dấu của điện tích q, Khi $q > 0$ đường xoắn ốc là quay trái, trái lại nếu $q < 0$ đường xoắn ốc là quay phải.

Sự thay đổi của động năng:

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m(x^2 + y^2 + z^2 - v_0^2)$$

$$= \frac{1}{2}m(v_0^2\sin^2\alpha\cos^2\omega t + v_0^2\sin^2\alpha\sin^2\omega t + v_0^2\cos^2\alpha - v_0^2) = 0.$$

Như vậy trong từ trường giá trị của vận tốc và động năng của hạt không bị thay đổi.

2.64. Lực Lorentz tác dụng lên hạt: $\vec{F} = q(E + \vec{v} \times \vec{B})$.

Vậy có thể viết phương trình Newton theo các thành phần

$$mx = qyB, \qquad my = qE - qxB, \qquad mz = 0$$

Rõ ràng trong trường hợp này dọc theo trục z chuyển động được mô tả bằng công thức:

$$z = v_{0z}.t = 0$$

Để tìm chuyển động trong mặt phẳng xy, giống như khi giải bài 2.32, ta chuyển sang biến $\xi = x + iy$... Khi đó 2 phương trình đầu chuyển thành phương trình dạng:

$$\xi + i\omega\,\xi = \frac{iq}{m}E, \qquad \text{trong đó:} \quad \omega = \frac{qB}{m}.$$

Nghiệm của phương trình này có dạng:

$$\xi = \xi_0 + \frac{i}{\omega}\left(\dot{\xi}_0 - \frac{qE}{m\omega}\right)\left(e^{-i\omega t} - 1\right) + \frac{qEt}{m\omega}.$$

Trở về các biến x và y và sử dụng các điều kiện ban đầu của vận tốc và vị trí ta được:

$$x = \frac{1}{\omega}\left(v_0 - \frac{qE}{m\omega}\right)\sin\omega t + \frac{qEt}{m\omega}, \qquad y = \frac{1}{\omega}\left(v_0 - \frac{qE}{m\omega}\right)(\cos\omega t - 1), \quad z = 0.$$

Ta chú ý rằng, nếu $v_0 = 0$ thì ta có thể viết các phương trình trên vào dạng:

$$x = \frac{qE}{m\omega^2}(\omega t - \sin\omega t), \qquad y = \frac{qE}{m\omega^2}(1 - \cos\omega t), \; z = 0.$$

Tức là các phương trình xycloid ở dạng tham số trên mặt phẳng xy.

2.65. $$x = -\frac{qE_0}{m\omega^2}\sin\omega t + \left(v_0 + \frac{qE_0}{m\omega}\right)t + x_0.$$

2.66. $$x = A\left(\omega\sin\omega t - \frac{k}{m}\cos\omega t\right)e^{\frac{-kt}{m}}$$

$$y = A\left(\omega\cos\omega t + \frac{k}{m}\sin\omega t\right)e^{\frac{-kt}{m}}$$

$$x_0 = -A\frac{k}{m}, \qquad y_0 = A\omega;$$

$$A = \frac{m^2 v_0}{k^2 + m^2\omega^2}, \qquad \omega = \frac{qB}{m}.$$

2.67. $$x = -\frac{qEt^2}{2m} + v_{0X}t,$$

$$y = \frac{v_{0Y}}{\omega}\sin\omega t,$$

$$z = \frac{v_{0Y}}{\omega}(\cos\omega t - 1), \omega = \frac{qB}{m}.$$

2.68. Bằng phương pháp giải như trong bài 2.31 và 2.24 ta đi đến kết quả $z = 0$. Điều này có nghĩa chuyển động của hạt là phẳng và dẫn đến phương trình vi phân:

$$\xi = \frac{E\omega}{B}e^{-i\omega t} - i\omega\xi.$$

Phương trình này có thể giải bằng phương pháp biến đổi hằng số.

Nội dung của phương pháp biến đổi hằng số như sau:

Giả sử ta có phương trình vi phân không thuần nhất dạng:

$$x = xf(t) + g(t).$$

Để giải phương trình này, trước hết hãy giải phương trình thuần nhất:

$$x = xf(t)$$

Bằng phương pháp tách biến ta có: $\frac{dx}{x} = f(t)dt.$

Tích phân cả hai vế ta được: $x(t) = C.e^{\int f(t)dt}$

Bây giờ để tìm nghiệm của phương trình không thuần nhất, ta thay hằng số C bằng một hàm của biến t: z(t), tức là: x(t) được viết vào dạng:

$$x(t) = z(t)\,e^{\int f(t)dt}$$

Tiếp đó lấy đạo hàm theo t và so sánh với phương trình không thuần nhất:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dz}{dt} e^{\int f(t)dt} + z(t) f(t) e^{\int f(t)dt} = g(t) + xf(t)$$

Kết quả là ta thu được phương trình thuần nhất cho hàm z (t):

$$\frac{dz}{dt} = g(t) e^{-\int f(t)dt}$$

với nghiệm có dạng: $z(t) = \int g(t) e^{-\int f(t)dt} dt.$

Vậy cuối cùng ta được:

$$x(t) = z(t) e^{\int f(t)dt} = \int g(t) e^{-\int f(t)dt} dt . e^{\int f(t)dt}$$

Áp dụng phương pháp trình bày trên vào phương trình thu được của bài toán ta có:

$$\xi(t) = \frac{E\omega}{B} t e^{-i\omega t}$$

Do đó sau khi lấy tích phân lần nữa và tách riêng các phần thực và phần ảo, đồng thời sử dụng các điều kiện ban đầu của bài toán ta thu được:

$$x(t) = \frac{E}{B\omega}(\omega t \sin\omega t + \cos\omega t - 1)$$

$$y(t) = \frac{E}{B\omega}(\omega t \cos\omega t - \sin\omega t).$$

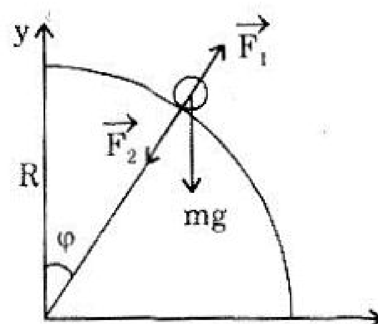
2.69.

1. Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng:

$$mgR = mgR\cos\varphi + \frac{1}{2}mv^2$$

ta tìm được vận tốc của hòn bi tại điểm bất kỳ trên quỹ đạo:

$$v = \sqrt{2gR(1 - \cos\varphi)}$$



Từ hình, ta thấy hòn bi rời khỏi mặt cầu khi giá trị của lực li tâm $\vec{F}_1$ vượt giá trị của lực nén $\vec{F}_2$ của hòn bi lên mặt cầu, tức là khi:

$$\frac{mv^2}{R} \geq mg\cos\varphi$$

Thay giá trị của v ở trên vào đây ta được: $2(1 - \cos\varphi) \geq \cos\varphi$.

Từ đây $\quad \cos\varphi \le \frac{2}{3}$.

Vậy hòn bi rời khỏi mặt cầu tại điểm:

$$x = R\cos\varphi_0, \qquad y = R\sin\varphi_0, \qquad \text{trong đó} \qquad \varphi_0 = \arccos\frac{2}{3} \approx 48^0.$$

Vận tốc của hòn bi tại điểm này bằng $v_0 = \sqrt{\frac{2}{3}Rg}$.

2. Một phương pháp khác giải bài toán này là tìm điểm, tại đây thành phần v_x của vec tơ vận tốc hòn bi đạt giá trị cực đại. Bởi vì:

$$v = (v\cos\varphi_1, -v\sin\varphi)$$

Vậy : $\qquad v_x = \sqrt{2gR(1-\cos\varphi)}\cos\varphi$

Từ phương trình $dv_x/d\varphi = 0$ ta lại thu được kết quả : $\cos\varphi_0 = \frac{2}{3}$.

2.70. Phương trình chuyển động với các liên kết có dạng: $mr = \vec{F} + \vec{F_R}$

ở đây F_R là lực phản ứng của các liên kết.

Thành phần tiếp tuyến của phương trình trên không chứa lực phản ứng, bởi vì $\vec{F_R}.\vec{t} = 0$, ở đây t là véc tơ đơn vị theo chiều tiếp tuyến, do đó ta có:

$$m\vec{r}\,\vec{t} = \vec{F}.\vec{t} \qquad \text{hay là} \qquad ms = F_t$$

Trong bài $x = R\sin\varphi$, $y = -R\cos\varphi$,

$$\text{vậy :} \qquad t = \frac{\left(\frac{dx}{d\varphi}, \frac{dy}{d\varphi}\right)}{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$$

do đó : $\qquad F_t = -mg\sin\varphi = ms$

Bởi vì $ds = Rd\varphi$, vậy cuối cùng ta được: $\varphi + \frac{g}{R}\sin\varphi = 0$

Đây là phương trình con lắc toán học có chiều dài R và nghiệm của nó sẽ là các hàm eliptic. Giả thiết rằng φ là nhỏ, tức $\sin\varphi \approx \varphi$, ta sẽ dẫn phương trình trên về phương trình của dao động tử điều hoà:

$$\varphi + \frac{g}{R}\varphi = 0 \qquad \text{có tần số dao động} \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{R}}.$$

2.71. Tiến hành tính toán như trong bài trên ta được:

$$\vec{t} = \left(\cos\frac{\gamma}{2}, \sin\frac{\gamma}{2}\right), \quad \text{từ đây} \quad F_t = \vec{F}.\vec{t} = -mg\sin\frac{\gamma}{2}$$

Còn cần diễn tả ds qua dγ:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\gamma}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\gamma}\right)^2}\, d\gamma = 2R\cos\frac{\gamma}{2}\, d\gamma.$$

Từ đây $\quad s = \int_0^{\gamma} 2R\cos\frac{\gamma'}{2} d\gamma' = 4R\sin\frac{\gamma}{2}, \quad$ hay là $\quad F_t = -\frac{mg}{4R}s.$

Như vậy ta được phương trình giao động tử điều hoà:

$$\ddot{s} + \frac{g}{4R}s = 0$$

Nếu đưa vào thêm các điều kiện ban đầu: $s(0) = s_0$, $v(0) = v_0$ thì ta được nghiệm dạng $s = A\sin(\omega t + \varphi)$, ở đây $A\sin\varphi = s_0$ và $A\cos\varphi = \frac{v_0}{\omega}$, trái lại $\omega = \sqrt{\frac{g}{4R}}$. Rõ ràng chu kỳ dao động $T = \frac{2\pi}{\omega} = 4\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$ không phụ thuộc vào s_0 và v_0; như vậy ta đã thu được con lắc đẳng thời. Nếu đặt $w_0 = 0$, thì $\varphi = \frac{\pi}{2}$ và $s = s_0\cos\omega t$.

Khi đó thời gian cần thiết để đi đến điểm thấp nhất của quỹ đạo luôn luôn bằng $t_0 = \pi\sqrt{\frac{g}{R}} = \frac{1}{4}T$. Có thể tính lực phản ứng F_R từ thành phần pháp tuyến của phương trình chuyển động:

$$m\ddot{\vec{r}}\vec{n} = \vec{F}\vec{n} + \vec{F}_R\vec{n},$$

ở đây $\vec{n} = \left(\sin\frac{\gamma}{2}, -\cos\frac{\gamma}{2}\right)$ là véc tơ đơn vị vuông góc đến $\vec{t}$

Từ đây ta được:

$$ma_n = m\frac{v^2}{\rho} = F_n + F_R$$

vì $\quad v = -s_0\omega\sin\omega t, \quad \rho = 4R\cos\frac{\gamma}{2}, \quad F_n = mg\cos\frac{\gamma}{2}$

vậy cuối cùng: $\quad F_R = \frac{mv^2}{\delta} - F_n = m\cos\frac{\gamma}{2}\left(\frac{s_0^2\omega^2}{R}\sin^2\frac{\gamma}{2} - g\right).$

2.72. Vận tốc của hạt trong môi trường thứ nhất

$$v_1 = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U_1)}$$

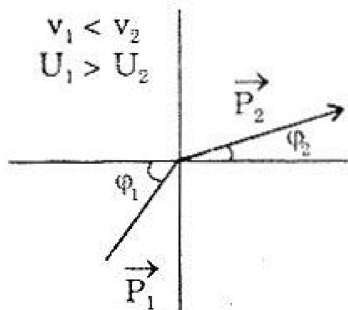
Và trong môi trường thứ hai

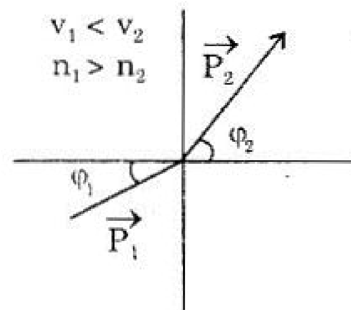
$$v_2 = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U_2)}$$

Tại mặt giới hạn của hai môi trường có sự thay đổi thành phần xung lượng vuông góc đến mặt giới hạn, vì gradU chỉ có thành phần vuông góc. Thành phần song song của xung lượng không đổi, như vậy:

$$mv_1\sin\varphi_1 = mv_2\sin\varphi_2$$

từ đây ta được: $\dfrac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2} = \dfrac{v_2}{v_1} = \sqrt{\dfrac{E - U_2}{E - U_1}}$





Trong trường hợp các photon $E = h\upsilon$, $p = \dfrac{E}{v}$ và từ điều kiện bảo toàn thành phần xung lượng song song đến mặt ngăn cách giữa hai môi trường ta được:

$$\frac{E}{v_1}\sin\varphi_1 = \frac{E}{v_2}\sin\varphi_2$$

tức là $\dfrac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2} = \dfrac{v_1}{v_2}$ và như vậy kết quả ngược lại.

2.73. Từ định luật bảo toàn năng lượng:

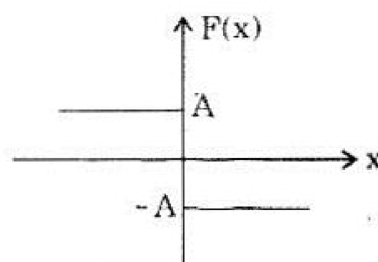
$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x)$$

ta tìm được giá trị vận tốc $\dfrac{dx}{dt} = \sqrt{\dfrac{2}{m}(E - U)}$. Dễ thấy rằng khi $E = U$, tức đối với $x_1 = +\dfrac{E}{A}$ và $-x_2 = -\dfrac{E}{A}$ hạt dừng lại. Ngoài ra thời gian chuyển động từ một điểm bất kỳ a đến điểm bất kỳ b bằng:

$$t_{ab} = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - A|x|)}}$$

Biết biểu thức của thế năng ta có thể tìm được lực F tác dụng lên hạt.

$$F = -dU/dx = \begin{cases} -A, \text{ đối với } x > 0 \\ A, x < 0 \end{cases}$$



Từ những kết quả thu được ta thấy rằng chuyển động của hạt là chuyển động giao động giữa các điểm x_1 và x_2. Vì trong các vùng $x > 0$ và $x < 0$ lực có giá trị không đổi, vậy từ điểm x_1 đến $x = 0$ hạt thực hiện chuyển động nhanh dần đều. Tại điểm $x = 0$ hạt đạt giá trị vận tốc cực đại bằng $\sqrt{\frac{2E}{m}}$, tiếp đó trên đoạn đường từ điểm $x = 0$ đến x_2 hạt sẽ chuyển động chậm dần đều. Tại điểm x_2 hạt dừng lại và rồi lại bắt đầu tăng nhanh dần về phương $x = 0$. Dễ dàng tính được chu kỳ của các dao động loại này:

$$T = 4\int_0^{E/A} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - Ax)}} = \frac{2\sqrt{2mE}}{A}\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y}} = \frac{4\sqrt{2mE}}{A}.$$

2.74. Lực tác dụng lên hạt: $F = -2Aatgax[1 + tg^2ax] = -2atgax[A + U]$

Các điểm dừng (quay) của quỹ đạo: $x_{1,2} = \frac{1}{a}\text{arctg}\left(\pm\sqrt{\frac{E}{A}}\right)$

Chu kỳ dao động: $T = \frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{2m}{E + A}}$.

2.75. Lực:

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} = \begin{cases} -A, \text{ khi } x > a, \\ A, \text{ khi } 0 < x < a, \\ 0, \text{ khi } x < 0. \end{cases}$$

Các điểm dừng thu được từ điều kiện $E = U(x)$, giải ra, tùy thuộc vào biến x, ta được:

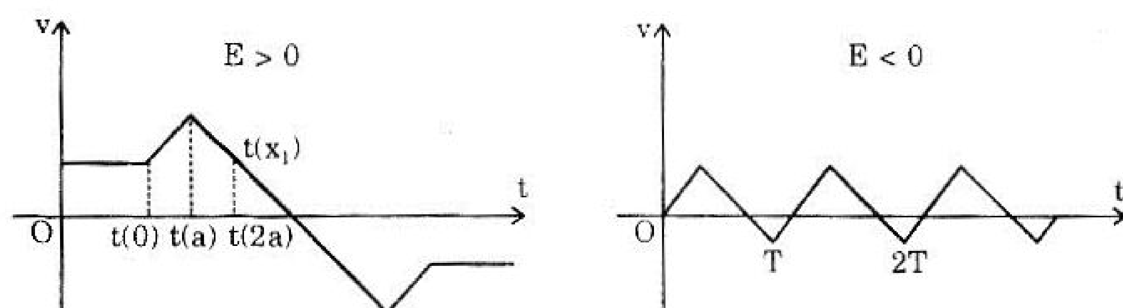
$$x_{1,2} = \pm\left(\frac{E}{A} + a\right) + a$$

do đó $\left.\begin{array}{l} x_1 = -\dfrac{E}{A} + 2a \\ x_2 = -\dfrac{E}{A} \end{array}\right\}$ đối với $E < 0$

và $x_1 = \dfrac{E}{A} + 2a$ đối với $E > 0$.

Chu kỳ dao động: $T = 4\int_a^{E/A+2a} \dfrac{dx}{\sqrt{\dfrac{2(E-U)}{m}}} = \dfrac{4}{A}\sqrt{2m(E+Aa)}$.

Sự phụ thuộc vận tốc của hạt vào thời gian:



2.76. Điểm quay của quỹ đạo: $x = -\left(\dfrac{1}{a}\right)\ln 2$.

Lực tác dụng lên hạt: $F = 2aA(e^{-2ax} - e^{-ax})$.

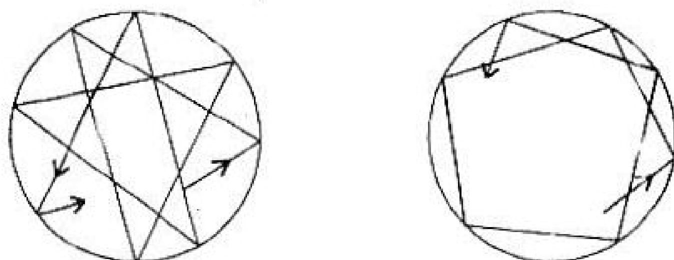
Phương trình chuyển động: $x(t) = \dfrac{1}{2}\ln\left[\dfrac{1}{2} + \dfrac{Aa^2}{m}(t+t_0)^2\right]$,

trong đó t_0 xác định từ các điều kiện ban đầu.

2.77. Nếu năng lượng toàn phần $E < 0$, thì hạt không thể chuyển động trong vùng $r > R$. Hạt sẽ chuyển động trong vùng quả cầu bán kính R và phản xạ phía trong mặt cầu đó. Vận tốc của hạt có giá trị:

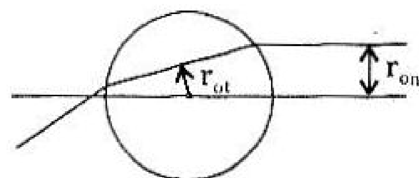
$$v = \sqrt{\frac{2}{m}(E+U)}.$$

Dạng quỹ đạo phụ thuộc vào các điều kiện ban đầu.



Đặc biệt nếu tại thời điểm ban đầu véc tơ $\vec{v}$ tiếp tuyến đến mặt cầu thì hạt sẽ chuyển động theo vòng tròn.

Bây giờ ta xét sự phụ thuộc giữa năng lượng và momen xung lượng của hạt nằm bên ngoài quả cầu (E > 0). Trong vùng này U = 0 do đó $E = E_K = \frac{1}{2}mv^2_n$. Ta đưa vào đây chỉ số n để chỉ vận tốc của chuyển động thực hiện ở vùng bên ngoài. Giá trị của momen xung lượng tính theo tâm cầu là $L = mr_{0n}v_n$. Ở đây r_{0n} là khoảng cách từ tâm cầu đến phương của véc tơ v_n. Từ các công thức này ta tìm được : $r_{0n} = \frac{L^2}{2mE}$.



Nếu $\frac{L^2}{2mE} > R$ thì hạt không chạy đến vùng r < R và thực hiện chuyển động với vận tốc $v_n = \sqrt{\frac{2E}{m}}$. Nếu $\frac{L^2}{2mE} < R$ thì hạt đi vào vùng bên trong quả cầu với vận tốc $v_t = \sqrt{\frac{2(E+U)}{m}}$. Bởi vì tại giới hạn các vùng giá trị của vận tốc thay đổi, vậy momen xung lượng có thể bảo toàn chỉ khi đồng thời thay đổi phương của vectơ vận tốc. Định luật bảo toàn momen xung lượng đòi hỏi để:

$$mr_{0t}v_t = mr_{0n}v_n$$

ở đây r_{0t} và r_{0n} lần lượt là khoảng cách từ tâm cầu đến phương véc tơ vận tốc tại vùng trong và vùng ngoài. Chuyển động của hạt ra khỏi vùng $r \le R$ cũng liên quan với sự thay đổi phương của véc tơ vận tốc. Quỹ đạo của hạt sẽ diễn tả trên hình. Từ công thức cuối cùng suy ra rằng quỹ đạo sẽ không bị khúc xạ nếu $r_{0n} = 0$ (va chạm của hạt với mặt cầu là va chạm xuyên tâm).

2.78. Nếu véc tơ $\vec{v_1}$ và $\vec{v_2}$ là vận tốc của chất điểm trước và sau va chạm, thì momen xung lượng tính theo một điểm O nên đó sẽ là:

$$\vec{M_1} = m(\vec{r} \times \vec{v_1}), \qquad \vec{M_2} = m(\vec{r} \times \vec{v_2})$$

Bởi vì $\vec{v_2} = \vec{v_1} + \Delta\vec{v}$, nên

$$\vec{M_2} = m[\vec{r} \times (\vec{v_1} + \Delta\vec{v})] = m(\vec{r} \times \vec{v_1}) + m(\vec{r} \times \Delta\vec{v})$$

Vậy ta có: $\vec{M_2} = \vec{M_1} + m(\vec{r} \times \Delta\vec{v})$

Nếu momen xung lượng phải là đại lượng không đổi theo điểm O, thì

đối với $\vec{r}$ xác định vị trí va chạm của hạt với mặt phẳng, tích véc tơ $\vec{r} \times \Delta\vec{v}$ phải bằng 0. Điều đó chỉ có thể xảy ra khi véc tơ $\vec{r}$ và $\Delta\vec{v}$ song song với nhau. Bởi vì véc tơ $\Delta\vec{v}$ vuông góc đến mặt phẳng va chạm, nên từ đây suy ra quỹ tích cần tìm chính là pháp tuyến của mặt phẳng đi qua điểm, nơi xảy ra va chạm.

2.79. Phương pháp tổng quát giải các bài toán loại này dựa trên đặc điểm lực $\vec{F}$ tác dụng lên vật là lực xuyên tâm:

$$F = F_r = m\,(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)$$

và định luật bảo toàn momen xung lượng đối với chuyển động trong trường xuyên tâm:

$$M = mr^2\dot{\varphi} = \text{const}.$$

Từ phương trình này suy ra:

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi} = \frac{dr}{d\varphi}\left(\frac{M}{mr^2}\right) = -\frac{M}{m}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)$$

và

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{d\varphi}\dot{\varphi} = -\frac{M}{m}\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{M}{mr^2} = -\frac{M}{mr^2}\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)$$

Thay các kết quả thu được vào công thức về lực ta được:

$$F_r = -\frac{M^2}{mr^2}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right],$$

được gọi là công thức Binet. Từ đây ta thấy phương trình quỹ đạo r (φ) cho phép ta tính trực tiếp được giá trị của lực. Trong trường hợp khảo sát $r = 2R\cos\varphi$, vậy sau khi đưa vào công thức Binet ta được:

$$F_r = -\frac{8M^2R^2}{mr^5}.$$

2.80. $$F_r = -\frac{12M^2R^4}{mr^7}, \qquad \sin 2\varphi = \frac{M}{mR^2}t.$$

2.81. $$F_r = -\frac{M^2}{mr^3}, \qquad \frac{M}{m}t = a^2\left(\frac{1}{\varphi_0} - \frac{1}{\varphi}\right).$$

2.82. Năng lượng con lắc:

$$E = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} - mgl\cos\varphi = -mgl\cos\varphi_0,$$

trong đó φ là góc lệch của con lắc khỏi vị trí cân bằng và φ_0 là góc lệch

cực đại (biên độ dao động), khi động năng chuyển hóa hoàn toàn sang thế năng.

Từ biểu thức trên ta có:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{g}{l}(\cos\varphi - \cos\varphi_0)} \quad \text{hay là} \quad dt = \sqrt{\frac{l}{2g}}.\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}}$$

Chu kỳ của dao động bằng 4 lần thời gian chuyển động từ góc $\varphi = 0$ đến $\varphi = \varphi_0$:

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}} = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi_0}{2}}}$$

Đặt $\frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)b} = \sin\xi$, tích phân trên trở thành:

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}K\left(\frac{\sin\varphi_0}{2}\right).$$

ở đây $K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\xi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\xi}}$ là tích phân elip loại I.

Nếu φ_0 là góc bé, khi $\sin\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) \approx \left(\frac{\varphi_0}{2}\right) << 1$ (dao động bé), thì có thể khai triển hàm K(k) vào dạng:

$$K(k) = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\varphi_0}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\varphi_0}{2} + ...\right) \approx \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{\varphi_0^2}{16} + ...\right)$$

Do đó: $$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\varphi_0^2}{16} + ...\right)$$

Số hạng thứ nhất của khai triển là công thức gần đúng quen biết.

2.83. Có thể diễn tả nghiệm tổng quát xác định vị trí của hạt đến tâm trường như hàm của thời gian

$$t = \int\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E + \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{M^2}{m^2r^2}}} + \text{const} \qquad (1)$$

vào dạng tham số như sau:

a) Trường hợp $E < 0$, khi quỹ đạo là elip. Tích phân (1) được viết vào dạng :

$$t = \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \int \frac{rdr}{\sqrt{-r^2 + \frac{\alpha}{|E|} r - \frac{M^2}{2m|E|}}} = \sqrt{\frac{ma}{\alpha}} \cdot \frac{rdr}{\sqrt{a^2e^2 - (r-a)^2}}$$

trong đó tâm sai $e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}$ và bán trục lớn $a = \frac{\alpha}{2|E|}$

Với việc thay thế: $r - a = -ae\cos\xi$, tích phân trên trở thành :

$$t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} \int (1 - e\cos\xi) d\xi = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} (\xi - \xi\sin\xi), \qquad (2)$$

tại thời điểm $t = 0$ hạt nằm tại điểm cực cận. Nhờ tham số ξ ta cũng có thể diễn tả tọa độ đề các của hạt $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ (trục x và y hướng theo các bán trục lớn và nhỏ của elip). Từ phương trình quỹ đạo:

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos\varphi$$

và (2) ta suy ra:

$$ex = p - r = a(1 - e^2) - a(1 - e\cos\xi) = ae(\cos\xi - e)$$

và $$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Cuối cùng:

$$x = a(\cos\xi - e), \qquad y = a\sqrt{1 - e^2}\sin\xi.$$

Tại đây một vòng quay của elip tương ứng với biến đổi tham số ξ một góc từ 0 đến 2π.

b) Tính toán tiến hành tương tự như trên cho trường hợp $E > 0$, khi quỹ đạo là hipecbôn ta được:

$$r = a(\cosh\xi - 1), \qquad t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} (e\sinh\xi - \xi),$$

$$x = a(e - \cosh\xi), \qquad y = a\sqrt{e^2 - 1}\sinh\xi,$$

trong đó ξ nhận mọi giá trị khả dĩ giữa $-\infty$ và $+\infty$.

c) Trong trường hợp $E = 0$ quỹ đạo là parabôn. Tích phân (1) chuyển thành:

$$t = \int \frac{\gamma d\gamma}{\sqrt{\frac{2\alpha}{m} r - \frac{M^2}{m^2}}}$$

Thực hiện phép thay thế :

$$r = \frac{M^2}{2m\alpha}(1+\eta^2) = \frac{p}{2}(1+\eta^2)$$

ta được biểu diễn tham số sau đây cho hệ thức cần tìm:

$$r = \frac{p}{2}(1+\eta^2), \qquad t = \sqrt{\frac{mp^3}{\alpha}}\,\frac{n}{2}\left(1+\frac{\eta^2}{2}\right),$$

$$x = = \frac{p}{2}(1-\eta^2),\ y = p\eta.$$

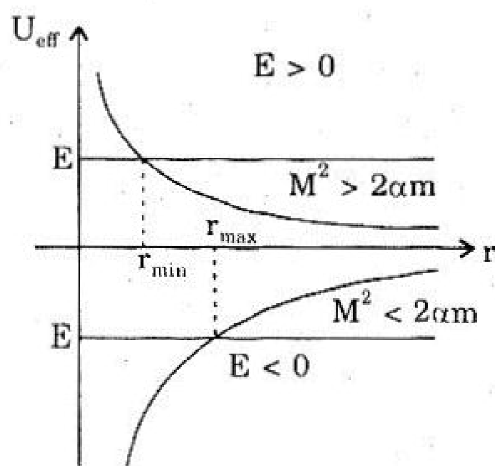
Tham số η nhận mọi giá trị từ $-\infty$ đến $+\infty$.

2.84. Bài toán dẫn đến khảo sát chuyển động của vật khối lượng m và năng lượng E trong trường thế năng $U = \frac{\alpha}{r^2}$, ở đây $\alpha > 0$. Vì lực tác dụng là lực xuyên tâm, nên mômen xung lượng bảo toàn và thế năng "hiệu dụng" của trường có dạng :

$$U_{eff} = \frac{M^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r^2} = \left(\frac{M^2 - 2\alpha m}{2m}\right)\frac{1}{r^2}.$$

Đặt $E = U_{eff}$ ta tìm được điểm quay của quỹ đạo:

$$r_0 = \sqrt{\frac{M^2 - 2\alpha m}{2mE}} = \sqrt{s}$$



Từ hình vẽ ta thấy có 3 trường hợp chuyển động khác nhau:

1) Khi $E > 0$ và $M^2 > 2\alpha m$, ta có:

$r_{min} = r_0, \quad r_{max} = \infty.$

2) Khi $E > 0$ và $M^2 < 2\alpha m$, ta có

$r_{min} = 0, \quad r_{max} = \infty.$

3) Khi $E < 0$ và $M^2 < 2\alpha m$, ta có:

$r_{min} = 0, \quad r_{max} = \gamma_0$

Trường hợp thứ tư ($E < 0$, $M^2 > 2\alpha m$) không thể xảy ra bởi vì khi đó động năng của hạt $E - U_{eff}$ phải nhỏ hơn không. Ngoài ra khi $M^2 = 2\alpha m$ thì $U_{eff} = 0$ và khảo sát không "cảm thấy" tồn tại lực xuyên tâm và do đó sẽ chuyển động như hạt tự do.

Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng: $E - U_{eff} = \frac{mr^2}{2}$

và định luật bảo toàn xung lượng: $M = mr^2\varphi = const$

vào việc tìm phương trình quỹ đạo. Từ đây ta có:

$$E - U_{eff} = \frac{M^2}{2mr^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2$$

Áp dụng phương pháp tách biến và lấy tích phân ta được:

$$\varphi = \int \frac{\left(\frac{M}{r^2}\right)dr}{\sqrt{2m(E - U_{eff})}}$$

Dễ dàng biến đổi tích phân trên vào dạng:

$$\varphi = \frac{M}{\sqrt{2mE}}\int \frac{dr}{r\sqrt{r^2 - s}}$$

Như ta thấy, tùy thuộc vào dấu của E và s ta thu được các trường hợp khác nhau:

Nếu $E > 0$, thì $r^2 > s$ và ta có hai khả năng: $s > 0$ và $s < 0$.

Trong trường hợp đầu ta đặt $s = a^2$ và thu được:

$$\int \frac{dr}{r\sqrt{r^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\arccos\frac{a}{r} + C_1 .$$

Trong trường hợp thứ hai đặt $s = -b^2$ và thu được:

$$\int \frac{dr}{r\sqrt{r^2 - b^2}} = \frac{1}{b}\operatorname{arsinh}\frac{b}{r} + C_2$$

Ngoài ra khi $E < 0$, khi đó $r^2 \le s$, tức $s > 0$ và đặt $s = a^2$ ta được:

$$\frac{M}{2m(-E)}\int \frac{dr}{r\sqrt{a^2 - r^2}} = \frac{M}{2m|E|}\left(\frac{1}{a}\operatorname{arcosh}\frac{a}{r} + C_3\right).$$

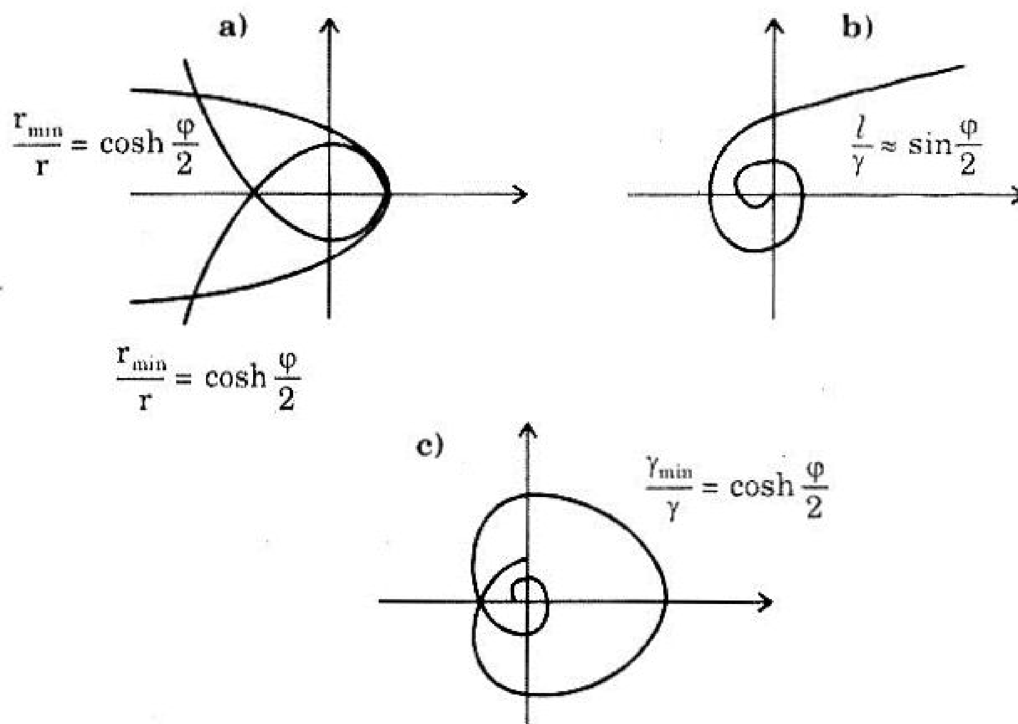
Ba kết quả khác nhau này ứng với ba trường hợp chuyển động khả dĩ của chuyển động.

Sử dụng các điều kiện ban đầu tương ứng ta xác định được các hằng số tích phân và giải các phương trình thu được trên theo r, cuối cùng thu được:

1. $\frac{1}{r} = \sqrt{\frac{2mE}{M^2 - 2\alpha m}}\cos\left[\varphi\sqrt{\left(1 - \frac{2\alpha m}{M^2}\right)}\right]$, khi $E > 0$ và $s > 0$;

2. $\frac{1}{r} = \sqrt{\frac{2mE}{2\alpha m - M^2}}\sinh\left[\varphi\sqrt{\left(\frac{2\alpha m}{M^2} - 1\right)}\right]$, khi $E > 0$ và $s < 0$;

3. $\frac{1}{r} = \sqrt{\frac{2mE}{M^2 - 2\alpha m}}\cosh\left[\varphi\sqrt{\left(\frac{2\alpha m}{M^2} - 1\right)}\right]$, khi $E < 0$ và $s > 0$.



Các phương trình trên tương đối phức tạp, nhưng để khảo sát dạng quỹ đạo ta viết chúng vào dạng đơn giản hơn:

1. $\frac{r_{min}}{r} = \cos(p\varphi)$, ở đây $p < 1$.

Dễ thấy rằng khi $\varphi = 0$, giá trị $r = r_{min}$ và khi $\varphi \to \pm\frac{\pi}{2p}$ giá trị $r = \infty$. Như vậy "hành tinh" từ vô cùng chuyển động gần đến tâm trường tại khoảng cách $r = r_{min}$ và tiếp đó lại chuyển động đến vô cùng và phương của quỹ đạo thay đổi một góc $\alpha = \frac{\pi}{p} - \pi = \pi\left(\frac{1-p}{p}\right)$, như vậy với các giá trị p nhỏ, "hành tinh" có thể nhiều lần quay quanh tâm lực. Hình a trình bày dạng quỹ đạo cho $r_{min} = 1$ và $p = \frac{1}{2}$, $r_{min} = 1$ và $p = \frac{1}{3}$.

2. $\frac{r_0}{r} = \sin b(p\varphi)$ ở đây p – bất kỳ.

Ta thấy rằng khi $\varphi \to 0$, giá trị $r \to \infty$, ngoài ra khi $\varphi \to \infty$ giá trị $r \to 0$. Như vậy hành tinh chuyển động từ vô cùng và cuối cùng rơi vào tâm lực. Đối với các giá trị góc φ lớn ta có thể thay thế sinh $(p\varphi)$ bằng $\frac{e^{p\varphi}}{2}$ và khi đó $r = 2r_o e^{-p\varphi}$, tức khi đó hành tinh sẽ rơi vào tâm theo đường cong tiệm cận với đường xoắn ốc logarit.

Dạng quỹ đạo cho $r_o = 1$ và $p = \frac{1}{2}$ trình bày trên hình b.

3. $\frac{r_{max}}{r} = \cosh(p\varphi)$, ở đây p là bất kỳ.

Khi $\varphi = 0$ giá trị $r = r_{max}$ và khi $\varphi = \pm\infty$, giá trị $r = 0$.

Như vậy "hành tinh" không thể vượt ra khỏi vùng $r \le r_{max}$ và ngoài ra không thể tránh khỏi việc rơi vào tâm lực cũng theo đường cong tiệm cận đến đường xoắn ốc lôgarit, bởi vì với φ lớn thì $\cos h\varphi \to \frac{1}{2}e^{p\varphi}$ ($r = 2r_{max}e^{-p\varphi}$). Hình c trình bày dạng quỹ đạo cho $r_{max} = 1$ và $p = \frac{1}{2}$.

Tóm lại với giả thiết nêu trong bài về trường lực tỉ lệ nghịch đến lập phương của khoảng cách sẽ không tồn tại các quỹ đạo dừng cho các hành tinh.

2.85. $t = \frac{M}{E}\sqrt{\frac{m\alpha}{2}}\left(\sqrt{A + \frac{E}{M^2\alpha}r_0^2} - \sqrt{A}\right)$ ở đây $A = \frac{1}{M^2} - \frac{1}{2\alpha m}$.

2.86. Phương trình quỹ đạo có dạng: $r = \frac{p}{e\cos[a(\varphi - \varphi_0)] + 1}$

ở đây $$p = \frac{2}{\alpha_1}\left(\alpha_2 + \frac{M^2}{2m}\right)$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{4E}{\alpha_1^2}\left(\alpha_2 + \frac{M^2}{2m}\right)} = \sqrt{1 + \frac{2E}{\alpha_1}p}$$

$$a = \sqrt{1 + \frac{2m\alpha_2}{M^2}}.$$

Đặt $\alpha_2 = 0$ ta được nghiệm của bài toán Kepler. Độc giả hãy biện luận dạng của quỹ đạo.

Chú ý: Cần lưu ý đến trường hợp $E < 0$ và a– số nguyên.

2.87. Khi r thay đổi từ r_{min} đến r_{max} rồi lại trở về r_{min} góc φ thay đổi một đại lượng diễn tả theo công thức:

$$\Delta\varphi = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m(E - U) - \frac{M^2}{r^2}}}$$

Có thể viết công thức này dưới dạng vi phân:

$$\Delta\varphi = -2\frac{\partial}{\partial M}\int_{r_{MIN}}^{r_{MAX}} \sqrt{2m(E - U) - \frac{M^2}{r^2}}dr.$$

Đưa $U = -\frac{\alpha}{r} + \delta U$ vào và khai triển biểu thức dưới dấu tích phân vào chuỗi luỹ thừa của δU;số hạng bậc không của khai triển cho kết quả 2π và số hạng bậc một diễn tả góc dịch chuyển δφ cần tìm:

$$\delta\varphi = \frac{\partial}{\partial M}\int_{r\,min}^{r\,max}\frac{2m\delta U dr}{\sqrt{2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)-\frac{M^2}{r^2}}} = \frac{\partial}{\partial M}\frac{2m}{M}\int_0^{\pi} r^2\delta U d\varphi \qquad (*)$$

ở đây từ tích phân theo dr ta chuyển sang tích phân theo dφ dọc theo quỹ đạo chuyển động "không nhiễu".

Trong trường hợp a) tích phân trong (*) là tầm thường và cho ta:

$$\delta U = -\frac{2\pi\beta m}{M^2} = -\frac{2\pi\beta}{\alpha p} \quad (\text{p là tham số elip, } p = \frac{M^2}{m\alpha})$$

Trong trường hợp b):

$$r^2\delta U = \frac{\gamma}{r} \quad \text{với} \quad r = p/(1 + e\cos\varphi)$$

và ta được: $\delta U = -\frac{6\pi\alpha\gamma m^2}{M^4} = -\frac{6\pi\gamma}{\alpha p^2}$.

2.88. Trong hệ tọa độ gắn với ống lực li tâm tác dụng lên chất điểm bằng:

$$F = (m\omega^2 x, 0, 0)$$

và lực Coriolis tác dụng lên chất điểm đó bằng:

$$F_c = (0, 0, -2m\omega x).$$

Vì lực Coriolis vuông góc đến thành ống, nên xuất hiện lực ma sát $T = fF_c$. Như vậy ta được phương trình chuyển động sau:

$$\ddot{x} = \omega^2 x - 2f\omega\dot{x}.$$

Nghiệm của phương trình vi phân này có dạng $x = e^{\lambda t}$. Thay vào phương trình trên ta được:

$$\lambda^2 + 2f\omega\lambda - \omega^2 = 0.$$

Từ đây ta có: $\lambda_{1,2} = \omega(-f \pm \sqrt{1+f^2})$

Vậy nghiệm tổng quát sẽ là: $x = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$.

Giả sử các điều kiện ban đầu là: $x(0) = x_0$, $\dot{x}_0 = 0$

Cuối cùng ta được : $x = \frac{x_0}{2\omega\sqrt{1+f^2}}(\lambda_1 e^{\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{\lambda_1 t})$.

2.89. $\Delta x_1 \approx v_0 t^2 \omega = 2,2\text{cm}$.

$Dx_2 \approx v_0 t^2 \omega \sin\varphi \approx 0,8\text{cm}$.

Cả hai người thợ săn đều có thể biện bạch như vậy, nếu họ nhắm bắn con chim sâu chứ không phải là con lợn rừng.

2.90. Vì độ lệch của con lắc nhỏ nên ta có thể xem chuyển động chỉ thực hiện trên mặt phẳng z = 0. Khi đó các phương trình chuyển động:

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l}x - 2\left(\vec{\omega} \times \vec{v}\right)x - \left[\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right)\right]_x$$

$$\ddot{y} = -\frac{g}{l}y - 2\left(\vec{\omega} \times \vec{v}\right)y - \left[\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right)\right]_y$$

Bỏ qua các số hạng chứa ω^2 và tính tích $\vec{\omega} \times \vec{v}$ ta được

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l}x + 2\omega \dot{y} \sin\varphi$$

$$\ddot{y} = -\frac{g}{l}y + 2\omega \dot{x} \sin\varphi$$

Đây là hệ phương trình liên hợp nhau, có thể giải chúng bằng cách đưa vào biến mới $\xi = x + iy$. Khi đó:

$$\xi + \frac{g}{1}\xi + 2i\omega \dot{\xi} \sin\varphi$$

Tìm nghiệm phương trình này ở dạng $\xi = e^{\lambda t}$

thay vào ta được:

$$\lambda^2 + 2i\omega\lambda\sin\varphi + \frac{g}{l} = 0$$

do đó: $\lambda_{1,2} = -i\omega\sin\varphi \pm i\sqrt{\omega^2 \sin^2\varphi + \frac{g}{l}}$.

Như vậy nghiệm tổng quát của phương trình có dạng:

$$\xi = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}.$$

Bởi vì $\frac{g}{l} >> \omega\sin\varphi$, vậy có thể bỏ qua số hạng $\omega^2\sin^2\varphi$ trong dấu căn và khi đó:

$$\xi = (Ae^{i\omega o t} + Be^{-i\omega o t}) - e^{-i\omega\sin\varphi} = \xi_0\, e^{-i\omega\sin\varphi},$$

trong đó $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ là tần số riêng của con lắc. Như vậy ta thấy đó là nghiệm của phương trình dao động tử điều hoà ξ_0 nhân với thừa số exp $(-i\omega\sin\varphi)$.

Thừa số này chỉ gây ra chuyển động quay quỹ đạo của con lắc được xác định bằng ξ_0. Dễ thấy rằng, nếu đặt $\xi_0 = x_0 + iy_0$, thì ta có thể viết ra các phương trình cho các thành phần riêng biệt:

$$x = \cos(\omega t\sin\varphi)\mathrm{Re}\,\xi_0 + \sin(\omega t\sin\varphi)\mathrm{Im}\,\xi_0$$

$$= x_0\cos(\omega t\sin\varphi) + y_0\sin(\omega t\sin\varphi)$$

$$y = -\sin(\omega t\sin\varphi)\mathrm{Re}\,\xi_0 + \cos(\omega t\sin\varphi)\mathrm{Im}\,\xi_0$$

$$= -x_0\sin(\omega t\sin\varphi) + y_0\cos(\omega t\sin\varphi)$$

ở đây x_0iy_0 mô tả chuyển động con lắc bị nhiễu loạn.

Đặt $x_0 = 0$ và $y_0 = R\cos\omega_0 t$ ta được:

$$x = R\cos\omega_0 t\sin(\omega t\sin\varphi)$$

$$y = R\cos\omega_0 t\cos(\omega t\sin\varphi)$$

tức $\vec{r} = \vec{k}\,R\cos\omega_0 t$

trong đó: $\vec{k} = [\sin(\omega t\sin\varphi), \cos(\omega t\sin\varphi)]$ là véc tơ đơn vị quay quanh trục z với vận tốc góc $\omega\sin\varphi$.

Khi đặt trên xích đạo con lắc Foucanlt không quay quanh trục thẳng đứng, vì khi đó $\varphi = 0$.

3.1. Khoảng cách từ tâm khối đến đường kính:

$$a = \frac{\sigma}{m}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi d\varphi.\int_0^R r^2 dr = \frac{\sigma}{\frac{\pi}{2}R^2\sigma}.2.\frac{R^3}{3} = \frac{4R}{3\pi},$$

ở đây $\sigma = \frac{2m}{\pi R^2}$ là mật độ khối lượng trên một đơn vị diện tích.

Góc lệch khỏi đường kính mặt tròn:

$$\alpha = \mathrm{arctg}\frac{a}{R} = \mathrm{arctg}\frac{4}{3\pi} = 0{,}4 \text{ rad} = 23^0.$$

3.2. $$r = \frac{R}{\sqrt[3]{2}} = \frac{R\sqrt[3]{4}}{2}.$$

3.3. Trong cả hai trường hợp lò so trên đều bị kéo dãn ra như nhau, như vậy độ dài của hệ hoàn toàn được xác định bởi khối lượng của vật phía dưới.

3.4. Độ giãn của vòng lò so thứ i bằng:

$$\Delta x_i = cF_i$$

ở đây: F_i – trọng lượng của lò xo từ vòng thứ i trở xuống,

c – hệ số tỷ lệ.

Nếu toàn lò so có n vòng thì độ giãn toàn phần là:

$$x = \sum_{i=0}^{n} \Delta x_i = c\sum_{i=0}^{n} F_i$$

Tính số vòng lò so theo thứ tự từ dưới lên ta có thể viết:

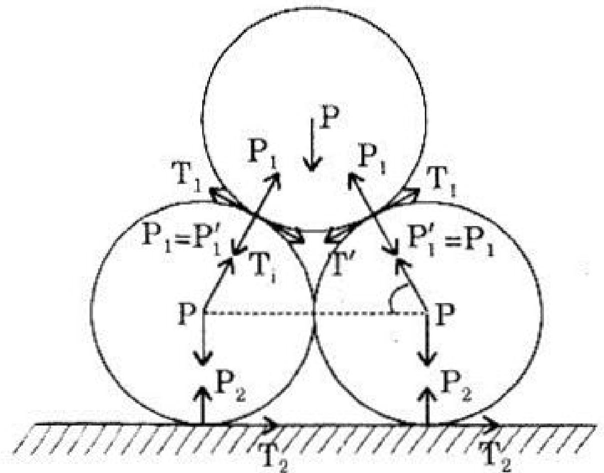
$$F_i = ig\Delta m,$$

trong đó: g – gia tốc trọng trường, Δm – khối lượng mỗi vòng.

Vậy ta có: $x = c.g.\Delta m\sum_{i=0}^{n} i = cg\Delta m\dfrac{n^2}{2}$.

Bởi vì $n\Delta m = m$ và $cn = \dfrac{1}{k}$, vậy cuối cùng: $x = \dfrac{1}{2}\dfrac{mg}{k}$.

3.5. Tất cả các lực tác dụng lên ba vật hình trụ. Đối với vật ở trên có các lực tác dụng như sau:



Trọng lực $\vec{P}$, hai lực phải ứng P_1 từ phía các vật dưới và hai lực ma sát có giá trị T_1. Còn đối với mỗi vật nằm dưới có trọng lực P, phản ứng của mặt phẳng P_2, lực ma sát lên mặt phẳng T_2 và lực ma sát lên vật ở trên $T'_1 = T_1$.

Tại trạng thái cân bằng tổng hình học tất cả các lực và tổng momen các lực tác dụng lên mỗi vật phải bằng không. Vậy ta có thể thiết lập các phương trình:

$2(P_1\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}T_1) - P = 0$ (Tổng các thành phần thẳng đứng của các lực tác dụng lên vật ở trên),

$P + P_1\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}T_1 - P_2 = 0$ (Tổng tương tự cho mỗi vật ở dưới),

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}T_1 + T_2 - \dfrac{1}{2}P_1 = 0$ (Tổng các thành phần nằm ngang của các lực tác dụng lên mỗi vật dưới).

$T_1 - T_2 = 0$, (từ tổng các mômen cho mỗi vật dưới).

Do tính chất đối xứng tổng các thành phần nằm ngang của các lực tác dụng lên vật ở trên cũng như hợp momen của lực tác dụng lên vật này đều bằng không. Từ các phương trình trên ta xác định được T_1, T_2, P_1, P_2 phụ thuộc vào P như sau:

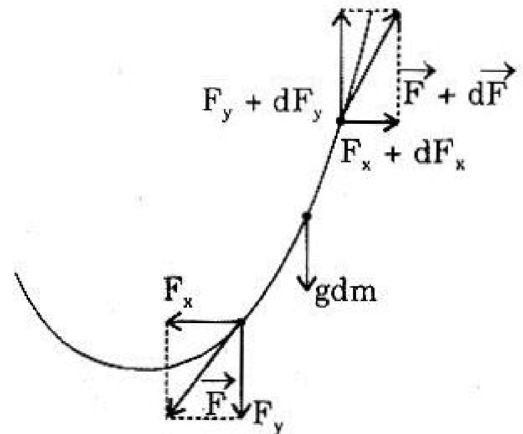
$$P_2 = \frac{3}{2}P, \quad P_1 = \frac{1}{2}P, \quad T_1 = T_2 = \frac{P}{2(2+\sqrt{3})}$$

Theo các tính chất đã cho, lực ma sát phải thoả mãn các hệ thức:

$$T_2 \le P_2 f, \; T_1 \le P_1 h.$$

Do đó $\quad f \ge [3(2+\sqrt{3})]^{-1}, \; h \ge (2+\sqrt{3})^{-1}.$

3.6. Ta hãy khảo sát một đoạn dây có chiều dài dl và khối lượng $dm = \rho dl$, ở đây ρ – mật độ khối lượng tuyến tính của sợi dây. Lực kéo căng tới dây tăng dần về phía các điểm treo và do đó nếu giá trị lực tác dụng lên đầu dưới của đoạn dl là F, thì lực tác dụng lên đầu trên của đoạn này sẽ là F + dF.



Bởi vì sợi dây nằm trong cân bằng, tổng tất cả các lực tác dụng lên đoạn dây dọc theo trục x và trục y phải bằng không, nên có thể viết:

$$(F_x + dF_x) - F_x = 0$$

$$(F_y + dF_y) - F_y - gdm = 0.$$

Từ phương trình đầu ta tìm được $F_x = \text{const}$

Trái lại phương trình thứ hai cho ta:

$$F_y = g\rho dl = g\rho\sqrt{(dx)^2 + (dy^2)}$$

hay là $\quad \dfrac{dF_y}{dx} = g\rho\sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$

Bởi vì $\dfrac{F_y}{F_x} = \dfrac{dy}{dx}$, vậy $\dfrac{dF_y}{dx} = F_x \dfrac{d^2y}{dx^2}$ (vì $F_x = \text{const}$)

và ta đi đến phương trình:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \qquad a = \frac{g\rho}{F_x} = \text{const}.$$

Đặt $w = \dfrac{dy}{dx}$, ta có thể viết phương trình trên vào dạng:

$$\frac{dw}{\sqrt{1+w^2}} = adx$$

Lấy tích phân ta được:

$$\ln\left(w + \sqrt{1+w^2}\right) = ax + C_1, \qquad C_1 \text{ - hằng số}$$

hay là $\sqrt{1+w^2} + w = e^{ax+C_1}$

Ngoài ra $\dfrac{1}{\sqrt{1+w^2}+w} = \sqrt{1+w^2} - w = e^{-ax-C_1}$

Vậy từ hai phương trình trên ta có:

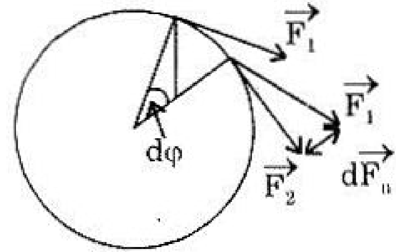
$$w = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{ax+C_1} - e^{-ax-C_1}\right) = \sinh(ax + C_1)$$

Do đó: $y = \int \sinh(ax + C_1)dx = \dfrac{1}{a}\cosh(ax + C_1) + C_2$

C_1 và C_2 là những hằng số tích phân. Biết tọa độ của các điểm treo và chiều dài l của sợi dây ta sẽ xác định được chúng.

3.7. Lực căng sợi dây tác dụng tiếp tuyến đến vòng tròn và tại mọi điểm trên chu vi này lực đó có giá trị không đổi. Nhưng lực này thay đổi phương khi ta thay đổi tọa độ góc của điểm. Khi thay đổi một góc dφ, lực thay đổi một đại lượng:

$$\text{H. } d\vec{F}_n = \vec{F}_2 - \vec{F}_1$$



Bởi vì $\left|\vec{F}_1\right| = \left|\vec{F}_2\right| = F = \text{const}$, nên từ hình vẽ ta có:

$$dF_n = Fd\varphi$$

Lực này hướng dọc theo pháp tuyến trong của hình trụ

Lực ma sát tác dụng giữa hình trụ và phần tử dây bao hàm trong góc dφ bằng:

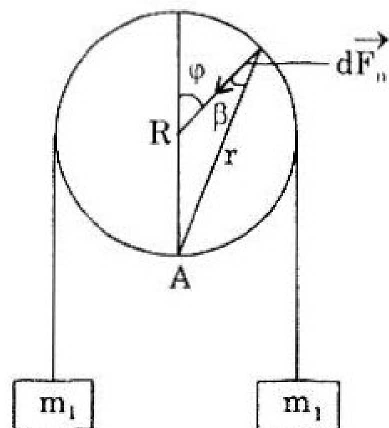
$$dF_{ms} = fdF_n = fFd\varphi$$

và phải cân bằng với trọng lượng gdm của phần tử dây trên

Bởi vì $dm = \dfrac{m}{2\pi}d\varphi$, vậy $fFd\varphi = \dfrac{mg}{2\pi}d\varphi$,

do đó $F = \dfrac{mg}{2\pi f}$.

3.8. Rõ rằng nếu khối lượng m_1 không đủ lớn thì hai nửa hình trụ tách ra và chỉ tiếp xúc với nhau dọc theo cạnh dưới của mặt bị cưa. Vậy bài toán dẫn đến việc xác định cân bằng các mômen lực tác dụng từ phía sợi dây và các momen trọng lực của hai nửa hình trụ. Nếu ký hiệu lực căng sợi dây bằng F, thì thành phần lực tác dụng vuông góc lên mặt hình trụ F_n xác định bằng công thức:



$$dF_n = Fd\varphi \qquad \text{(xem lời giải bài 5.7)}$$

Rõ ràng $F = m_1g$, và do đó $dF_n = m_1gd\varphi$

Giá trị của momen lực tính theo cạnh A bằng:

$$dM = r\sin(\pi - \beta)dF_n = r\sin\beta dF_n$$

Các ký hiệu trình bày trên hình.

Vì $r = 2R\cos\beta$ nên $dM = 2R\sin\beta\cos\beta dF_n$

Chú ý rằng: $2\beta = \varphi$ và $dF_n = m_1gd\varphi$, ta đi đến hệ thức:

$$dM = m_1gR\sin\varphi d\varphi$$

Giá trị toàn phần của momen lực tác dụng lên mỗi nửa hình trụ sẽ là:

$$M = m_1gR\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi = m_1gR$$

Momen trọng lực của nửa hình trụ cùng tính theo cạnh A bằng:

$$M = \frac{1}{2}m.g.a$$

Ở đây a là khoảng cách từ tâm khối đến mặt phẳng tiết diện (bị cưa) vì $a = \frac{4R}{3\pi}$ (xem bài 1). Vậy: $M = \frac{2mgR}{3\pi}$.

So sánh hai momen trên ta được: $m_1 = \frac{2m}{3\pi}$.

3.9. Ký hiệu lực tác dụng dọc theo sợi dây (tiếp tuyến đến mặt trục) bằng F và lực ma sát bằng F_{ms}. Nếu sợi dây không trượt trên trục tức là tại mỗi điểm trên trục thoả mãn đẳng thức:

$$F - F_{ms} = 0 \qquad \text{hay} \qquad \frac{dF}{d\varphi} - \frac{dF_{ms}}{d\varphi} = 0.$$

Sự thay đổi phương của véc tơ lực tiếp tuyến dẫn đến xuất hiện lực tác

dụng pháp tuyến lên mặt trục (xem bài 5.7). Tiếp theo lực pháp tuyến dẫn đến xuất hiện ma sát. Nếu lực pháp tuyến dF_n ứng với gia tăng góc $d\varphi$ thì:

$$dF_{ms} = fdF_n \qquad \text{và} \qquad \frac{dF_{ms}}{d\varphi} = f\frac{dF_n}{d\varphi}$$

Ngoài ra ta có: $\frac{dF_n}{d\varphi} = F$ (xem bài 5.8).

Thay công thức này vào phương trình đầu tiên ta được:

$$\frac{dF}{d\varphi} - fF = 0, \text{ do đó } \int_{F_1}^{F_2}\frac{dF}{F} = f\int_0^{2\pi n} d\varphi .$$

Ở đây F_1 và F_2 là những lực tác dụng trên hai đầu sợi dây, n–số vòng dây trên trục. Chiều tăng của góc φ chọn theo chiều tăng của lực, tức là $F_1 < F_2$. Tích phân lên ta được:

$$F_1 = F_2\exp(-2n\pi f) \quad \text{hay là} \quad m = M\exp(-2\pi nf).$$

Đặt f = 0,7 vào ta dễ dàng nhận thấy rằng với 5 vòng dây $2\pi nf \approx 22$ và như vậy lực F_1 thực tế gần như bằng không và con người dễ dàng giữ được khối lượng $M = 10^3$.

3.10. Khoảng cách từ tâm các quả cầu đến mặt phẳng nằm ngang đi qua tâm 0 của chỏm cầu lần lượt bằng:

$$h_1 = (R - r_1)\cos\alpha_1, \qquad h_2 = (R - r_2)\cos\alpha_2$$

Tổng của hai góc $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ không phụ thuộc vào vị trí của các quả cầu nằm trong chỏm cầu.

Tính theo mức đi qua tâm 0 của chỏm cầu thế năng của hệ bằng:

$$U = -m_1g(R - r_1)\cos\alpha_1 - m_2g(R - r_2)\cos\alpha_2.$$

Điều kiện cân bằng của hệ là:

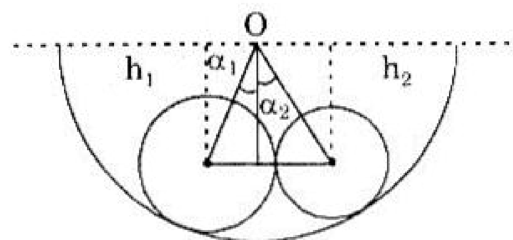
$$\frac{dU}{d\alpha_1} = 0 \qquad \text{hay là} \qquad \alpha\sin\alpha_1 = \sin(\alpha - \alpha_1)$$

ở đây
$$a = \frac{m_1(R - r_1)}{m_2(R - r_2)} = \frac{r_1^3(R - r_1)}{r_2^3(R - r_2)} = \frac{2}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^3 = 2,1$$

Thực hiện phép tính đơn giản ta tìm được:

$$tg\alpha_1 = \frac{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}{a + \cos\alpha}$$

Từ hình vẽ trực tiếp suy ra:



$$(r_1 + r_2)^2 = (R - r_1)^2 + (R - r_2)^2 - 2(R - r_1)(R - r_2)\cos\alpha$$

Từ đây $\cos\alpha = \dfrac{R^2 - Rr_1 - Rr_2 - r_1r_2}{(R - r_1)(R - r_2)} = \dfrac{2}{3}$

Thay kết quả này vào biểu thức của tgα1 ta tìm được $\alpha_1 = 0{,}265\text{rad} = 15^0$.

3.11. Thế năng của hệ tính theo mức trục O

$$U = \frac{1}{2}Mgl\sin\varphi + mg(h - a_2)$$

ở đây a_2 là chiều dài của đoạn dây ở phía phải ròng rọc. Bởi vì chiều dài của đoạn dây ở phía trái ròng rọc bằng:

$$a_1 = \sqrt{l^2 + h^2 - 2hl\sin\varphi}$$

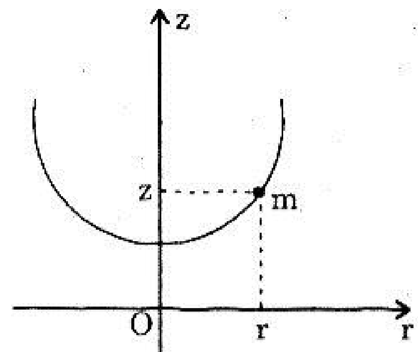
Vậy nếu đặt $a = a_1 + a_2$ là chiều dài của sợi dây, thì ta có thể viết:

$$U = \frac{1}{2}Mgl\sin\varphi + mg(h - a + \sqrt{h^2 + l^2 - 2hl\sin\varphi}).$$

Đạo hàm biểu thức này theo sinφ và so sánh với không ta tìm được:

$$\sin\varphi = \frac{l^2 + h^2}{2hl} - 2\frac{h}{l}\left(\frac{m}{M}\right)^2.$$

3.12. Ta hãy xét chất điểm m nằm trên mặt tại điểm có tọa độ (r, z). Trong hệ tọa độ quy chiếu quay năng lượng toàn phần của chất điểm m bằng tổng thế năng hấp dẫn và thế năng hiệu dụng liên hệ với chuyển động quay:



$$E = mgz - \frac{1}{2}m\omega^2r^2$$

Nếu chất điểm nằm ở trạng thái cân bằng phiếm định thì năng lượng của nó phải không có cực trị, tức là E = const. Điều kiện này đưa đến phương trình:

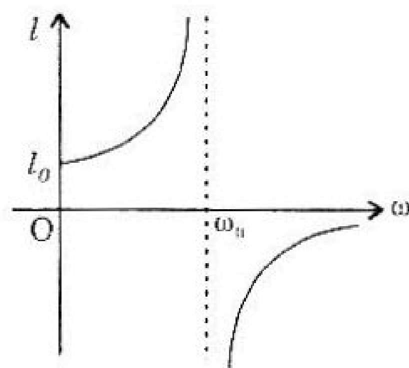
$$z = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g}r^2 + \text{const}$$

Đây chính là phương trình của mặt parabôn quay.

3.13. Nếu khoảng cách quả cầu đến trục quay bằng l, thì độ giãn là $l - l_0$ và thế năng sẽ là $U_1 = k(l - l_0)^2$. Trong hệ quy chiếu quay cùng với ống thế năng trong trường lực ly tâm bằng: $U_2 = -\dfrac{1}{2}m\omega^2l^2$.

Năng lượng toàn phần:

$$E = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 l^2$$



Vị trí cân bằng ứng với cực trị của hàm E(l).

Từ điều kiện $\frac{dE}{dl} = 0$, ta suy ra:

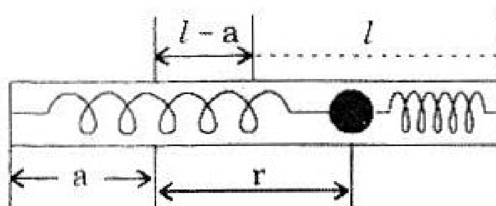
$$l = \frac{l_0 \frac{k}{m}}{\frac{k}{m} - \omega^2} = \frac{\omega_0^2 l_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

ở đây $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Tính đạo hàm bậc hai của năng lượng theo l ta dễ dàng khẳng định được rằng đối với $\omega < \omega_0$ cân bằng có đặc trưng cân bằng bền.

Đồ thị hàm $l(\omega)$ trình bày trên hình. Những kết luận rút ra từ đồ thị của hàm này là mâu thuẫn với thực nghiệm. Vì thứ nhất là hàm này gián đoạn tại điểm $\omega = \omega_0$. Thứ hai là trong vùng $\omega > \omega_0$ hàm nhận các giá trị âm không có ý nghĩa vật lý và ngoài ra (l) giảm dần khi ω tăng. Vậy có thể kết luận là về mặt vật lý việc vượt vận tốc $\omega = \omega_0$ không thể xảy ra. Trong thực tế chỉ có thể là đối với mỗi lò so thực chỉ trong một phạm vi giới hạn của biến dạng mới thỏa mãn điều kiện tỷ lệ giữa độ giãn và giá trị của lực tác dụng.

Ta chú ý thêm rằng $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ là tần số dao động riêng của vật m buộc vào đầu lò so. Lưu ý này dẫn đến kết luận là $\omega = \omega_0$ thỏa mãn các điều kiện cộng hưởng và điều đó giải thích sự giã n vô hạn của l cùng với $\omega \to \omega_0$.

3.14. Giả sử khi quả cầu nằm ở vị trí giữa ống chiều dài của mỗi lò so bằng x_0. Tại vị trí bất kỳ thì chiều dài của một lò so bằng $x_1 = x_0 + \Delta x$ và của lò so kia $x_2 = x_0 - \Delta x$. Từ hình vẽ dễ thấy rằng $\Delta x = r - (l - a)$, ở đây r là khoảng cách của quả cầu đến trục quay.



Thế năng của hai lò xo bằng:

$$U_1 + U_2 = \frac{1}{2}k(x_0 + \Delta x)^2 + \frac{1}{2}k(x_0 - \Delta x)^2$$

Trong hệ quy chiếu quay cùng với ống năng lượng toàn phần bằng tổng năng lượng của các lò so trên và thế năng của trường hướng tâm:

$$U_3 = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2$$

$$E(r) = \frac{1}{2}k[x_0 + r - (l-a)]^2 + \frac{1}{2}k[x_0 - r + (l-a)]^2 - \frac{1}{2}m\omega^2r^2$$

Vị trí cân bằng của quả cầu xác định từ điều kiện cực trị của năng lượng, tức so sánh $\frac{dE}{dr}$ với không ta được:

$$2k(r - l + a) - m\omega^2 r = 0$$

Từ đây $\quad r = \dfrac{l - a}{1 - \omega^2 \dfrac{m}{2k}}$.

Tại đây ta cũng nên biện luận chút ít, tuy rằng theo yêu cầu của bài toán biện luận này không nhất thiết phải có và cũng không ảnh hưởng để diễn biến phân tích kết quả, nhưng lại tương đối thú vị. Cụ thể ở đây đại lượng $\sqrt{\frac{2k}{m}} = \omega_0$ là tần số dao động riêng của quả cầu móc giữa hai lò so. Sử dụng ký hiệu đó ta viết kết quả bài toán vào dạng:

$$r = \frac{l - a}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Dễ thấy vị trí cân bằng phụ thuộc vào tỷ số $\frac{\omega}{\omega_0}$. Nếu $\omega < \omega_0$, thì $r > 0$, trái lại nếu $\omega > \omega_0$ thì $r < 0$. Điều này có nghĩa là tùy thuộc vào ω vị trí cân bằng có thể nằm ở bên phần ống dài hơn hoặc phần ống ngắn hơn. Ngoài ra ta còn thấy, nếu $\omega >> \omega_0$, thì vị trí cân bằng nằm tại gần trục quay.

Cũng cần phải giải thích các điểm đã tìm được sẽ ứng với loại cân bằng gì. Điều này đòi hỏi phải xác định loại cực trị của hàm E(r). Tính đạo hàm bậc hai của E theo r ta thấy rằng trong trường hợp $\omega < \omega_0$ thì $\frac{d^2E}{dr^2} > 0$, tức năng lượng của hệ đạt cực tiểu và cân bằng là cân bằng bền. Tương tự ta xác định được cân bằng động ứng với trường hợp $\omega > \omega_0$.

3.15. Nếu r_1, r_2, và r_3 lần lượt là vị trí các điểm trong hệ tâm khối thì lực hấp dẫn tác dụng lên hạt m_1 bằng:

$$F_1 = G\frac{m_1}{a_3}[m_2(\vec{r_2} + \vec{r_1}) + m_3(\vec{r_3} - \vec{r_1})]$$

$$= G\frac{m_1}{a_3}[m_2\vec{r_2} - m_2\vec{r_1} + m_3\vec{r_3} - m_3\vec{r_1}]$$

Cộng và trừ biểu thức bên trong dấu ngoặc với đại lượng $m_1\vec{r_1}$ ta được:

$$F_1 = G\frac{m_1}{a_3}[(m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2} + m_3\vec{r_3}) - (m + m_2 + m_3)\vec{r_1}]$$

$$= G\frac{m_1M}{a_3}(r_c - r_1).$$

trong đó $M = m_1 + m_2 + m_3$ – khối lượng của hệ và $\vec{r_c} = \frac{\sum m_1 \vec{r_i}}{\sum m_i}$ là tọa độ của tâm khối.

Nhưng ta xét bài toán trong hệ tâm khối, tại đó $r_c = 0$, do đó:

$$\vec{F_1} = -G\frac{m_1M}{a^3}\vec{r_1}$$

Đối với các hạt còn lại ta cũng có những biểu thức tương tự để hệ nằm trong cân bằng thì các lực $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, $\vec{F_3}$ phải cân bằng với các lực ly tâm tương ứng. Bởi vì các lực ly tâm hướng dọc theo bán kính quay vuông góc với trục quay, vậy điều rõ ràng là để thỏa mãn điều kiện cân bằng đồng thời cho tất cả các hạt thì trục quay phải đi qua tâm khối và vuông góc đến mặt hình tam giác. Vậy ta có thể viết:

$$G\frac{m_iM}{a^3}r_i = m_i\omega^2 r_i \ (i = 1, 2, 3...)$$

Từ đây suy ra : $\omega = \sqrt{\frac{GM}{a^3}}$.

Kết quả này không phụ thuộc vào m_i cũng như r_i và như vậy vận tốc góc xác định theo công thức trên thỏa mãn điều kiện đặt ra của bài toán.

3.16.

a) Tại điểm B, ở tọa độ x xuất hiện một lực ly tâm F(x) tác dụng lên lò so, kéo giãn một đoạn vô cùng bé của lò so từ độ dài bạn đầu dx_0 đến độ dài $dx = dx_0(1 + xF(x))$, ở đây $\chi = \frac{1}{k}$. Vậy mật độ khối lượng của lò so trong một dơn vị chiều dài thay dổi từ giá trị $\rho_0 = \frac{m}{l_0}$ đến giá trị

$$\rho(x) = \rho_0\frac{1}{1 + \chi F(x)} \quad (1)$$

Khi dịch chuyển điểm B một đoạn dx, lực F(x) thay đổi một đại lượng:

$$dF(x) = -dm(x)x\omega^2 = -\frac{\rho\omega^2 x^2}{1 + F(x).\chi}dx$$

Vậy phương trình vi phân cho F(x) có dạng :

$$\frac{d}{dx}F(x) = -\frac{\rho_0\omega^2 x^2}{1 + F(x)\chi}$$

Để giải phương trình này ta dùng phép thay thế :

$$G(x) = F + \frac{1}{2}\chi F^2$$

Khi đó phương trình chuyển về dạng :

$$\frac{dG}{dx} = -\rho_0\omega^2 x$$

Sau khi tích phân và trở về hàm F ta có phương trình bậc hai :

$$\frac{1}{2}\chi F^2 + F + \frac{1}{2}\rho\omega^2(x^2 + C) = 0 \qquad (2)$$

Hằng số tích phân C xác định từ điều kiện triệt tiêu lực F tại điểm A (tại đầu mút của lò so mà chiều dài của nó ký hiệu bằng $l = l(\omega)$), $C = l^2$

Giải phương trình (1) ta được:

$$F(x) = \frac{\sqrt{1 + \rho_0\omega^2\chi(l^2 - x^2)} - 1}{\chi} \qquad (3)$$

Ta xác định chiều dài l của lò so từ điều kiện khối lượng m không đổi, tích phân $\rho(x)$ diễn tả theo phương trình (1)

$$m = \int_0^l \rho(x)dx = \int_0^l \frac{dx'}{\sqrt{1 + \rho_0\omega^2\chi(l^2 - x^2)}} = \frac{\rho}{U}\arcsin\frac{Ul}{1 - U^2 l^2} \qquad (4)$$

ở đây $U = \chi\rho_0\omega^2$.

Điều kiện để giải phương trình (4) là :

$$l_0 U < \frac{1}{2}\pi \qquad \text{hay là} \qquad l_0\omega\sqrt{\frac{\rho_0}{k}} < \frac{\pi}{2}.$$

Chỉ các tần số quay không thoả mãn điều kiện này thì trạng thái cân bằng mới được thiết lập.

Giải (4) ta được: $l = \frac{1}{U}\text{tg}\,(l_0 U)$.

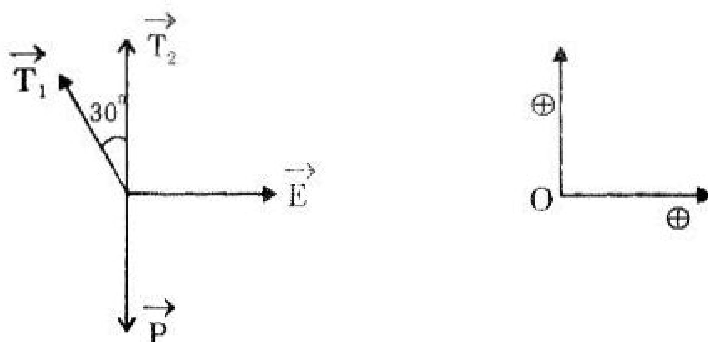
b) Momen quán tính của lò so bằng:

$$I = \int_0^l \rho(x)x^2 dx = \frac{ml^2}{2} - \frac{\rho_0 l}{2U^2} = \frac{\text{tg}(Ul_0)}{2U^2}\left[m\text{tg}(Ul_0) - \frac{\rho_0}{U}\right]$$

Năng lượng của chuyển động quay:

$$E = \frac{\text{tg}(Ul_0)}{4x\rho_0}\left[\left[m\text{tg}(Ul_0) - \frac{\rho_0}{U}\right]\right] = \frac{\text{tg}(\chi m\omega^2)}{4\chi}\left[l_0\,\text{tg}(xm\omega^2 - \frac{1}{Um\omega^2})\right].$$

3.17.



Ròng rọc đứng cân bằng dưới tác dụng của các lực :

– Trọng lực $\vec{P}$.

– Lực kéo $\vec{F}$

– Sức căng dây $\vec{T_1}$ dây AB.

– Sức căng dây $\vec{T_2}$ dây CD $(T_1 = T_2)$

Ta có : $\vec{P} + \vec{F} + \vec{T_1} + \vec{T_2} = 0.$

Chiếu hệ thức véc tơ trên xuống phương nằm ngang và chọn chiều ⊕ như trên ta có :

$$F - T_1\cos60^0 = 0 \quad (1)$$

Chiếu xuống phương thẳng đứng ta có :

$$-P + T_1\cos30^0 + T_2 = 0 \quad (2)$$

Từ (2) $\Rightarrow$ $T_1\cos30^0 + T_2 = P$ $\Leftrightarrow$ $T_1\cos30^0 + T_1 = mg$

Hay $T_1\dfrac{\sqrt{3}}{2} + T_1 = mg$ $\Leftrightarrow$ $T_1 = \dfrac{mg}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1} = \dfrac{10}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1}$

$\Rightarrow$ $T_1 = 5,4$ N

Từ (1) $\Rightarrow$ $F = T_1\cos60^0 = T_1\dfrac{1}{2} = 2,7\text{N}$

Vậy lực F = 2,7 N.

3.18. Nếu người kéo vào dây a một lực T thì sức căng của dây b cũng bằng T, dây c sẽ chịu sức căng 2T và dây d cũng chịu sức căng 2T. Theo định luật III Newton thì dây a cũng tác dụng lên người một lực bằng T nên người chỉ đè lên tấm gỗ một lực có độ lớn bằng $P_1 - T$ (hay $\vec{P_1} + \vec{T}$, $\vec{T}$ ngược chiều với $\vec{P_1}$).

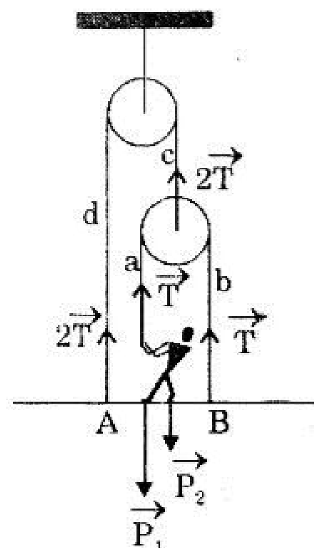
Vậy các lực tác dụng lên tấm gỗ gồm :

– Trọng lực $\overrightarrow{P_2}$ tấm gỗ.

– Lực nén của người ($\overrightarrow{P_1} + \vec{T}$)

– Sức căng của dây b : $\vec{T}$

– Sức căng của dây d : $2\vec{T}$



Ta có : $\overrightarrow{P_2} + (\overrightarrow{P_1} + \vec{T}) + \vec{T} + 2\vec{T} = 0$

Các lực đều cùng phương nên ta có :

$$-\overrightarrow{P_2} - \overrightarrow{P_1} + \vec{T} + \vec{T} + 2\vec{T} = 0$$ (Chọn chiều ⊕ hướng lên).

Suy ra : $T = \dfrac{P_1 + P_2}{4} = \dfrac{900}{4} = 225N$

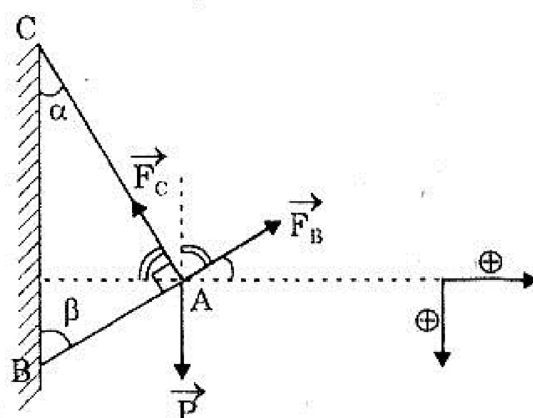
Vậy lực kéo của người vào dây a bằng 225N.

3.19. Thanh AB bị nén lại nên lực đàn hồi của AB là $\vec{F_B}$

Thanh AC bị kéo ra nên lực đàn hồi của AC là $\vec{F_C}$

Điểm A đứng cân bằng dưới tác dụng của 3 lực :

$$\vec{P}, \overrightarrow{F_B}, \vec{F_C}$$



Ta có : $\vec{P} + \overrightarrow{F_B} + \vec{F_C} = 0$

Chiếu hệ thức véc tơ xuống trục ngang, ta có :

$$F_B\cos\alpha - F_C\cos\beta = 0.$$

Chiếu hệ thức véc tơ xuống trục thẳng đứng, ta có :

$$P - F_B\cos\beta - F_C\cos\alpha = 0.$$

Từ (1) $\Rightarrow F_B\cos\alpha - F_C\cos\beta \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{F_B}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = F_C\dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad F_C = F_B.\sqrt{3}$

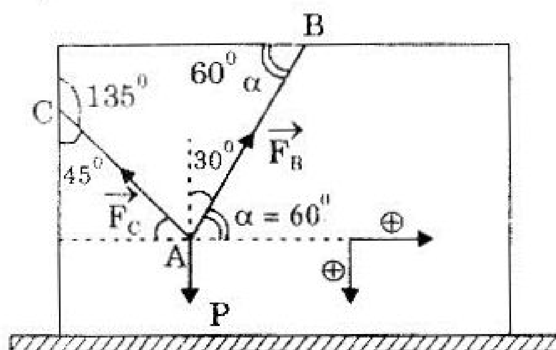
Thay $F_C = F_B.\sqrt{3}$ vào (2), ta có:

$$P - F_B\cos\beta - F_B\cos\alpha = 0$$

$$P - F_B\frac{1}{2} - F_B.\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2F_B = P$$

$$F_B = \frac{P}{2} = 50N \quad \text{và} \quad F_C = 86,5N.$$

3.20. Ta có điều kiện để điểm A đứng cân bằng là :



$$\vec{P} + \vec{F_B} + \vec{F_C} = 0$$

Chiếu hệ thức véc tơ xuống phương nằm ngang ta có :

$$F_B\cos\alpha - F_C\cos45^0 = 0 \quad (1)$$

Chiếu hệ thức véc tơ xuống phương thẳng đứng ta có :

$$P - F_B\cos30^0 - F_C\cos45^0 = 0 \qquad (2)$$

Từ (1) $\Rightarrow$ $F_B\cos\alpha = F_C\cos45^0$

$$F_B\frac{1}{2} = F_C.\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad F_B = F_C\sqrt{2}$$

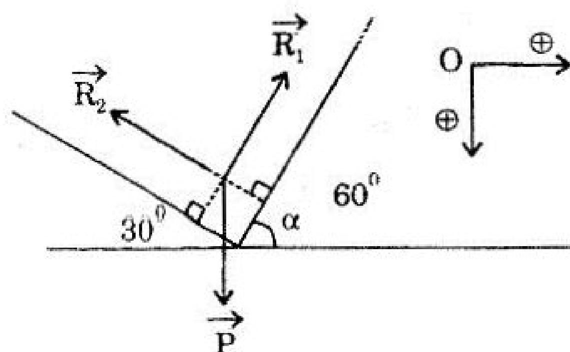
(2) $\Leftrightarrow$ $P - F_C.\sqrt{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} - F_C.\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$ $\Leftrightarrow$ $F_C = \frac{2P}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}$

Suy ra : $F_C = 26N$ và $F_B = 36,6$ N.

3.21.

a) Trường hợp $\alpha = 45^0$ $\vec{R_1}, \vec{R_2}$ là phản lực của các mặt nghiêng lên quả cầu ($R_1 = R_2$).

Quả cầu đứng cân bằng dưới tác dụng của 3 lực : $\vec{P}, \vec{R_1}, \vec{R_2}$



Ta có : $\vec{P} + \vec{R_1} + \vec{R_2} = 0$

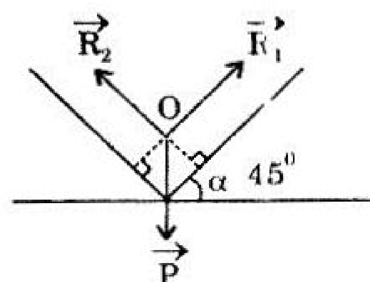
$\vec{R_1}, \vec{R_2}$ vuông góc với mặt phẳng nghiêng và có độ lớn bằng nhau nên:

$$R_1 = R_2 = \frac{P}{\sqrt{2}} = \frac{100}{\sqrt{2}} = 71N$$

Vậy lực nén $\vec{N}$ của quả cầu lên các mặt nghiêng là :

$$N = R_1 = R_2 = 71 \text{ N}$$

b) Trường hợp $\alpha = 60^0$



Ta có : $\vec{P} + \vec{R_1} + \vec{R_2} = 0$

Chiếu hệ thức véc tơ xuống phương nằm ngang, ta có :

$$R_1 \cos 60^0 - R_2 \cos 30^0 = 0 \qquad (1)$$

Suy ra : $R_1 = R_2\sqrt{3}$

Chiếu hệ thức véc tơ xuống phương thẳng đứng, ta có :

$$P - R_1 \cos 30^0 - R_2 \cos 60^0 = 0 \qquad (2)$$

$$\Leftrightarrow \quad P - R_1 \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{R_2}{2} = 0 \qquad (3)$$

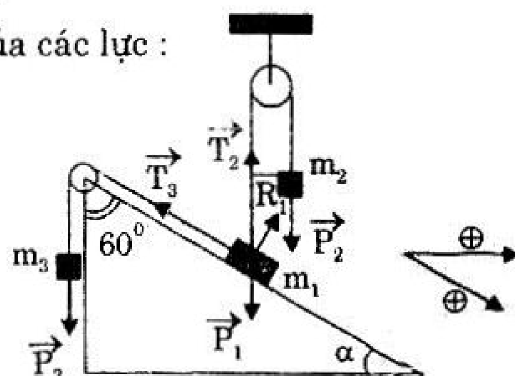
Thay $R_1 = R_2\sqrt{3}$ vào (3), ta có:

$$P - \frac{3R_2}{2} - \frac{R_2}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_2 = \frac{P}{2} = 50N$$

$$\text{và} \quad R_1 = 50\sqrt{3} = 83{,}5N$$

Ta suy ra lực nén của quả cầu lên mặt nghiêng 30^0 là $N_1 = R_1 = 86{,}5N$ và lên mặt nghiêng 60^0 là $N_2 = R_2 = 50N$.

3.22. Khối m_2 đứng cân bằng dưới tác dụng của các lực :



– Trọng lực $\vec{P_1}$

– Phản lực $\vec{R_1}$ của mặt nghiêng

– Lực căng $\vec{T_2}$ ($T_2 = P_2$)

– Lực căng $\vec{T_3}$ ($T_3 = P_3$).

Ta có : $\vec{P_1} + \vec{R_1} + \vec{T_2} + \vec{T_3} = 0 \qquad (1)$

Lần lượt chiếu hệ thức véc tơ (1) lên phương song song với mặt nghiêng và phương nằm ngang, ta có :

– Chiếu lên phương song song với mặt phẳng nghiêng :

$$P_1 \cos 60^0 - T_2 \cos 60^0 - T_3 = 0 \qquad (2)$$

– Chiếu lên phương nằm ngang :

$$R_1 \cos 60^0 - T_3 \cos 30^0 = 0 \qquad (3)$$

Từ (2) $\Rightarrow \quad T_3 = P_1 \cos 60^0 - T_2 \cos 60^0 = \dfrac{P_1 - P_2}{2}$

Hay $\quad m_3 g = \dfrac{m_1 g - m_2 g}{2} \quad \Rightarrow \quad m_3 = \dfrac{m_1 - m_2}{2} = 1kg$

Vậy $m_3 = 1kg$.

Từ (3) $\Rightarrow \quad R_1 \cos 60^0 = T_3 \cos 30^0 \quad \Leftrightarrow \quad R_1 \dfrac{1}{2} = m_3 g \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Hay : $R_1 = 17,3N$

Lực nén $\overrightarrow{N_1}$ của m_1 lên mặt nghiêng có độ lớn bằng R_1.

Vậy : $N_1 = 17,3N$.

3.23.

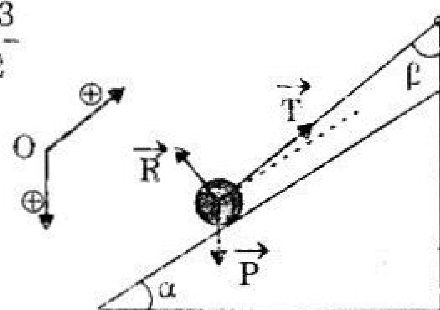
Quả cầu đứng cân bằng dưới tác dụng của các lực :

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = 0 \quad (1)$$

Chiếu hệ thức véc tơ (1) lên phương song song với mặt nghiêng, ta có .

$$- P\sin\alpha + T\cos(60 - \beta) = 0 \quad (2)$$

$$\Rightarrow \quad \cos(60 - \beta) = \frac{P}{T}\sin\alpha = \frac{30}{10\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



hay : $\cos(60 - \beta) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^0$

Suy ra : $60 - \beta = 30 \quad \Rightarrow \quad \beta = 30^0$.

Chiếu hệ thức véc tơ lên phương thẳng đứng, ta có :

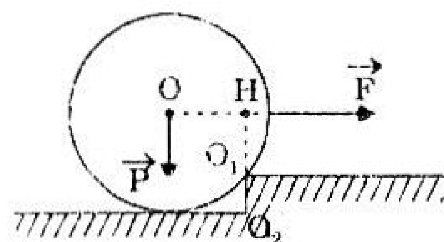
$$P - T\cos\beta - R\cos\alpha = 0 \quad (3)$$

Suy ra : $R = \frac{P - T\cos\beta}{\cos\alpha} = 10\sqrt{3}N$.

Vậy lực nén của quả cầu lên mặt nghiêng là: $N = R = 10\sqrt{3}N$.

3.24. Tâm quay là điểm tựa O_1.

Điều kiện cân bằng: $M_{\frac{\vec{P}}{O_1}} = M_{\frac{\vec{F}}{O_1}}$



Hay: $P.GH = F.O_1H \quad \Rightarrow \quad F = \frac{P.GH}{O_1.H}$

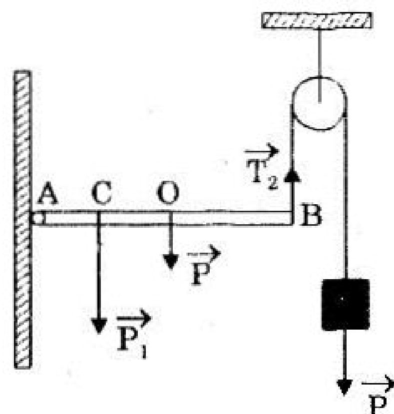
Với : $GH = \sqrt{O_1G^2 - O_1H^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

$$O_1H = \frac{R}{2}$$

Vậy : $F = P\sqrt{3} = 1000\sqrt{3} = 1732N.$

Muốn kéo hình trụ lên phải tác dụng lực **$F \geq 1732$ N (lực tối thiểu** bằng 1732 N).

3.25. Điều kiện cân bằng:



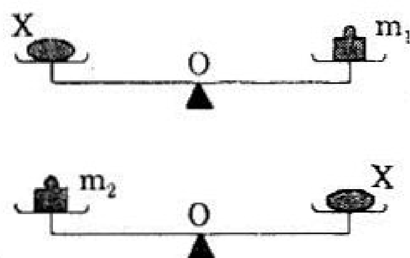
$$M_{\vec{P_1}/A} = M_{\vec{P}/A} = M_{\vec{T_2}/A}$$

$$\Leftrightarrow \quad P_1AC + P.\frac{AB}{2} = P_2.AB \quad (\text{vì } T_2 = P_2)$$

$$\Leftrightarrow \quad P_1(AC - BC) + P.\frac{AB}{2} = P_2.AB$$

$$\Leftrightarrow \quad AB = 25cm = 0,25 \text{ m}.$$

3.26. Gọi X là khối lượng của vật $m_1 = 40g$, $m_2 = 44,1$ g.



Dựa vào hình vẽ ta có các cân bằng sau :

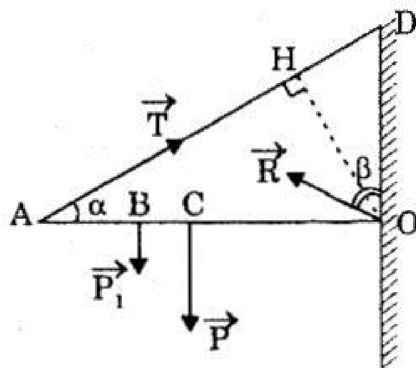
$$X.g.OA = m_1g.OB$$

$$m_2g.OA = Xg.OB.$$

Chia (1) cho (2) ta có :

$$\frac{X}{m_2} = \frac{m_1}{X} \quad \Rightarrow \quad X^2 = m_1.m_2 = 1764.$$

3.27. Dây AD có khuynh hướng kéo đầu A của thanh lên trên nên lực nén của thanh vào tường có khuynh hướng lệch xuống dưới. Do đó phản lực $\vec{R}$ của tường tại O sẽ hướng lên. Thanh OA đứng cân bằng dưới tác dụng của các lực:



- Trọng lực $\vec{P}$ của thanh.
- Trọng lực $\vec{P_1}$ của quả cân m_1
- Lực căng $\vec{T}$ của dây AD
- Phản lực $\vec{R}$ của tường

Ta có các điều kiện cân bằng sau đây :

$$\vec{P} + \vec{P_1} + \vec{T} + \vec{R} = 0 \qquad (1)$$

$$M_{\vec{P}/O} + M_{\vec{P_1}/O} = M_{\vec{T}/O} \qquad (2)$$

(2) $\Leftrightarrow$ $P.OC + P_1.OB = T.OA\sin\alpha$ (vì $OH = OA\sin\alpha$)

$\Rightarrow$ $T = 8,6N$

Lần lượt chiếu hệ thức vectơ (1) lên trục nằm ngang và trục thẳng đứng, ta có :

- Trục ngang : $T\cos\alpha - R\sin\beta = 0$ (2)
- Trục thẳng đứng : $-P = P_1 + T\sin\alpha + R\cos\beta = 0$ (3)

Từ (2) $\Rightarrow$ $R\sin\beta = T\cos\alpha$ (4)

(3) $\Rightarrow$ $R\cos\beta = P + P_1 + T\sin\alpha$ (5)

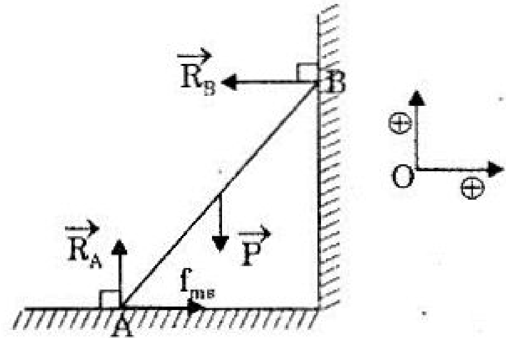
Chia (4) cho (5) $\Rightarrow$ $\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta} = \dfrac{T\cos\alpha}{P + P_1 - T\sin\alpha}$

Hay $tg\beta = \dfrac{8{,}6.0{,}7}{4 + 6 - 8{,}6.0{,}7} = 1{,}51$

Từ (2) $\Rightarrow$ $R = \dfrac{T\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{8{,}6.0{,}7}{0{,}839} = 7{,}2N$

Vậy : $R = 7{,}2N$ và $\beta = 57^0$.

3.28. Ngoại lực tác dụng lên thang gồm:



– Trọng lực $\vec{P}$

– Các phản lực $\overrightarrow{R_A}, \overrightarrow{R_B}$

– Lực ma sát nghỉ $\overrightarrow{f_{ms}}$ của sàn

(Vì tường trơn nhẵn nên tại đầu B không có ma sát)

Ta có : $\vec{P} + \overrightarrow{R_A} + \overrightarrow{R_B} + \overrightarrow{f_{ms}} = 0$ (1)

$M_{\frac{\vec{P}}{A}} + M_{\frac{\overrightarrow{R_A}}{A}} + M_{\frac{\overrightarrow{R_B}}{A}} = M_{\frac{\overrightarrow{f_{ms}}}{A}} = 0$ (2)

a) Trường hợp $\alpha = 45^0$

Ta có : $M_{\frac{\vec{P}}{A}} = M_{\frac{\overrightarrow{R_B}}{A}}$ vì $M_{\frac{\overrightarrow{R_A}}{A}}, M_{\frac{\overrightarrow{f_{ms}}}{A}} = 0$

Hay : $P\dfrac{AB}{2}\cos\alpha = R_B.BC = R_B.AB\sin\alpha$

$\Rightarrow$ $R_B = \dfrac{P}{2} = 100N$ (vì $\alpha = 45^0$)

Chiếu hệ thức véc tơ (1) lên phương thẳng đứng ta có :

$-P + R_A = 0 \Rightarrow R_A = P = 200$ N

Chiếu hệ thức véc tơ (1) lên phương nằm ngang ta có :

$F_{ms} - R_B = 0 \Rightarrow F_{ms} = R_B = 100$ N

Vậy lực tác dụng lên thang khi $\alpha = 45^0$ là :

– Trọng lực : $P = 200$ N

– Phản lực của sàn ở A : $R_A = 200N$

– Phản lực của tường ở B : $R_B = 100N$

– Lực ma sát nghỉ : $f_{ms} = 100N$

b) Giá trị α để thang không trượt trên sàn.

Khi thang cân bằng thì : $M_{\overrightarrow{R_B}/A} = M_{\overrightarrow{R_A}/A}$

Hay $R_B.AB.\sin\alpha = P.\frac{AB}{2}\cos\alpha \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{P}{2R_B}$

Kết quả câu a) cho biết $R_B = f_{ms} = \frac{P}{2tg\alpha}$ (1)

Ta biết : $f_{ms} \le k.R_A = kP$ (vì $R_A = P$) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{P}{2tg\alpha} \le kP \Leftrightarrow \frac{1}{2tg\alpha} \le k$

Hay : $tg\alpha \ge \frac{1}{2k} = \frac{1}{1,2} = 0,833$

Suy ra : $\alpha \ge 40^0$.

4.1. Coi nước như một chất lưu lý tưởng.

a) Gọi v_A, v_B, v_C lần lượt là vận tốc nước tại A, B, C. Theo định lý về tính liên tục của chất lưu ta có:

$$S_Av_A = S_Bv_B = S_Cv_C \equiv const \quad (1)$$

Từ (1) ta thấy, vì $S_A > S_B > S_C$ nên $v_A < v_B < v_C$.

Do đó $\left(\frac{\rho v_A^2}{2}\right) < \left(\frac{\rho v_B^2}{2}\right) < \left(\frac{\rho v_C^2}{2}\right)$, với ρ là khối lượng riêng của nước.

Vậy áp suất động tăng dần từ A đến C.

Gọi P_A, P_B, P_C là các áp suất tĩnh tại A, B, C. Phương trình Bernoulli trong trường hợp ống dòng nằm ngang cho ta:

$$P_A + \frac{\rho v_A^2}{2} = P_B + \frac{\rho v_B^2}{2} = P_C + \frac{\rho v_C^2}{2} \equiv const \quad (2)$$

Từ (2) suy ra $P_A > P_B > P_C$. Vậy áp xuất tĩnh giảm dần từ A đến C.

Từ (2) ta cũng thấy: Áp suất toàn phần (áp suất tĩnh + áp suất động) tại mọi điểm của ống đều bằng nhau.

b) Tại miệng C của ống Pitô vận tốc của nước bằng không: $v_C = 0$. Do đó từ (2) suy ra:

$$P_B + \frac{\rho v_B^2}{2} = P_C \quad (3)$$

trong đó: $P_B = P_O + \rho g h_B$, $P_C = P_O + \rho g h_C$ (với P_O là áp suất khí quyển, h_B và h_C là chiều cao các cột nước tại B và C). Thay P_B và P_C vào (3), ta thu được:

$$\rho g h_B + \frac{\rho v_B^2}{2} = \rho g h_C.$$

Vậy: $$v_B = [2g(h_C - h_B)]^{\frac{1}{2}} = 1m/s \quad (4)$$

c) Áp dụng các công thức của cơ học chất lưu cho các điểm B và C, ta thu được các phương trình sau:

$$P_A + \rho\frac{v_A^2}{2} = P_B + \rho\frac{v_B^2}{2} \quad (5)$$

$$P_A = \rho g h_A + P_O; P_B = \rho g h_B + P_O \quad (6)$$

$$S_A v_A = S_B v_B \quad \text{hay} \quad v_A = \frac{S_B}{S_A} v_B \quad (7)$$

Thay (6) và (7) vào (5) ta thu được:

$$v_B = \left[\frac{2g(h_A - h_B)}{S_A^2 - S_B^2}\right]^{\frac{1}{2}} S_A \approx 1m/s. \quad (8)$$

Nhận xét: Kết qủa tính V_B bằng hai phương pháp nêu ở (b) và (c) giống nhau, song phương pháp dùng ống Pitô đơn giản hơn nhiều.

4.2. Gọi v là vận tốc chảy của dòng khí CO_2; m là khối lượng khí chảy qua tiết diện ngang S của ống sau thời gian t; ρ là khối lượng riêng của khí; d là đường kính của ống. Ta có thể tích V của dòng khí:

$$V = svt \quad (1)$$

Mặt khác, ta có mối liên hệ:

$$m = \rho V; \; s = \frac{\pi d^2}{4} \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta thu được:

$$svt = \frac{m}{\rho} \quad \rightarrow \quad v = \frac{m}{\rho st} = \frac{4m}{\pi d^2 \rho t} \approx 0{,}12m/s.$$

4.3. Gọi S_1 là diện tích tiết diện ngang của bình; v_1 là vận tốc chảy của nước tại đó (cũng chính bằng vận tốc giảm mực nước); S_2 là diện tích tiết diện ngang của lỗ thủng; v_2 là vận tốc chảy của nước qua lỗ. Ta có phương trình Bernoulli:

$$P_0 + \rho\frac{v_1^2}{2} + \rho g h = P_0 + \rho\frac{v_2^2}{2} \quad (1)$$

(P_0 là áp xuất của khí quyển).

Từ (1) suy ra: $v_1^2 + 2gh = v_2^2$ (2)

Mặt khác do tính liên tục của dòng chảy:

$$v_1 s_1 = v_2 s_2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{S_1}{S_2} v_1 \qquad (3)$$

Thay (3) vào (2), ta có:

$$v_1^2 + 2gh = \frac{S_1^2}{S_2^2} v_1^2 \quad \Rightarrow \quad v_1^2 \left(1 - \frac{S_1^2}{S_2^2}\right) + 2gh = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v_1^2 \left(S_2^2 - S_1^2\right)}{S_2^2} + 2gh = 0$$

Do đó: $$v_1 = S_2 \left(\frac{2gh}{\left(S_1^2 - S_2^2\right)}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (4)$$

Đó là sự phụ thuộc của vận tốc hạ mức nước trong bình vào độ cao h của mực nước.

Trường hợp D >> d, tức $S_1 >> S_2$ ta có biểu thức gần đúng:

$$v_1 \approx \frac{S_2}{S_1} \sqrt{2gh}$$

Mặt khác vì: $S_1 = \dfrac{\pi D^2}{4}$; $S_2 = \dfrac{\pi d^2}{4}$

do đó: $$v_1 \approx \frac{d^2}{D^2} \sqrt{2gh} \approx 8.10^{-4} \text{ m/s.} \qquad (5)$$

4.4. Gọi vận tốc của tia nước qua lỗ là v_0. Ta có:

$$v_0 = \sqrt{2gh_2} \qquad (1)$$

Sau khi ra khỏi lỗ, các phần tử nước chuyển động như một vật ném ngang với vận tốc ban đầu bằng v_0, tức các phần tử nước tham gia đồng thời hai chuyển động: Chuyển động đều theo phương nằm ngang với vận tốc v_0 và chuyển động rơi tự do với gia tốc g. Gọi τ là thời gian tính từ lúc các phần tử nước ra khỏi miệng lỗ đến khi va chạm mặt bàn.Ta có mối liên hệ:

$$h_1 = \frac{1}{2} g\tau^2 \quad \rightarrow \quad \tau = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} \qquad (2)$$

Suy ra nước rơi xuống mặt bàn cách lỗ (theo phương nằm ngang) một đoạn L bằng:

$$L = v_0\tau = \sqrt{2gh_2}.\sqrt{\frac{2h_1}{g}} = 2\sqrt{h_1h_2} \quad (3)$$

4.5. a) Gọi L_1 và L_2 là khoảng cách từ điểm rơi của tia nước thứ nhất và tia nước thứ hai tương ứng trên mặt bàn; H là khoảng cách từ đáy bình đến mức nước; $h_1^{(1)}$ là khoảng cách từ lỗ thứ nhất đến đáy bình; $h_2^{(2)}$ là khoảng cách từ lỗ thứ hai đến mức nước. Theo tính toán tương tự trong bài 8.4, ta có:

$$L_1 = 2\sqrt{h_1^{(1)}\left(H - h_1^{(1)}\right)} \quad (1)$$

$$L_2 = 2\sqrt{\left(H - h_2^{(2)}\right)h_2^{(2)}} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

Nếu: $h_1^{(1)} = h_2^{(2)} \quad \rightarrow \quad H - h_1^{(1)} = H - h_2^{(2)}$.

và dẫn đến: $L_1 = L_2$.

b) Tương tự như tính toán ở bài 8.4, ta có tia nước rơi xuống mặt bàn cách lỗ một đoạn L (theo phương trình nằm ngang) bằng:

$$L = 2\sqrt{h_1h_2} \quad (3)$$

trong đó h_1 là khoảng cách từ lỗ đến đáy, h_2 là khoảng cách từ lỗ đến mực nước.

Để L_{max} cần có $(h_1h_2)_{max}$.

Mặt khác $(h_1h_2)_{max}$ khi $h_1 = h_2 = \dfrac{H}{2}$.

Vậy dẫn đến, lỗ ở vị trí giữa đáy bình và mực nước.

c) Sau khi ra khỏi lỗ, các phần tử nước chuyển động như một vật ném ngang với vận tốc ban đầu v_0. Do vậy,vận tốc của các tia nước trên mặt bàn được tính tương tự như vận tốc của vật lúc chạm đất. Gọi τ là thời gian tính từ lúc các phần tử nước ra khỏi miệng lỗ đến khi chạm mặt bàn. Gọi v_x và v_y là các thành phần vận tốc của các phần tử nước theo phương nằm ngang và theo phương thẳng đứng sau khi ra khỏi lỗ. Ta có vận tốc của các tia nước tại thời điểm t nào đó sau:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (4)$$

trong đó $v_x = v_0$; $v_y = gt$.

Dẫn đến, vận tốc của các tia nước trên mặt bàn, tức lúc $t = \tau$ sẽ bằng:

$$v_\tau = \sqrt{(v_x)_\tau^2 + (v_y)_\tau^2} = \sqrt{v_0^2 + (g\tau)^2} \quad (5)$$

Mặt khác, tương tự như cách tính v_0, τ trong bài 8.4, ta có:

$$v_0 = \sqrt{2gh_2}\ ;\ \tau = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} \qquad (6)$$

Thay (6) vào (5), ta được:

$$v_\tau = \sqrt{2g(h_1 + h_2)} = \sqrt{2gH} \qquad (7)$$

Theo (7), vận tốc của các tia nước trên mặt bàn chỉ phụ thuộc vào khoảng cách H và đều bằng nhau.

4.6. Độ cao của mực nước dâng lên trong ống cong dịch chuyển dọc theo một máng chứa đầy nước với vận tốc v được tính tương tự như tính khoảng cách từ lỗ tới mặt nước trong bình khi vận tốc chảy của nước qua lỗ nhỏ đó là v.

$$v = \sqrt{2gh} \qquad \Rightarrow h = \frac{v^2}{2g} \approx 3{,}5\text{m}$$

4.7. a);b);d) Trong các trường hợp: gầu nước đứng yên; gầu được nâng lên đều; gầu chuyển động theo phương nằm ngang với gia tốc $1{,}2\text{m/s}^27$, ta có nước chảy qua lỗ với vận tốc bằng:

$$v = \sqrt{2gH} \approx 2{,}4 \text{ m/s} \qquad (1)$$

c) Gầu chuyển động với gia tốc $1{,}2\text{m/s}^2$ lên trên ta có nước chảy qua lỗ với vận tốc bằng:

$$v_{lên} = \sqrt{2\left(g + 1{,}2\frac{m}{s^2}\right)H} \approx 2{,}57 \text{ m/s} \qquad (2)$$

Gầu chuyển động với gia tốc $1{,}2\text{m/s}^2$ xuống dưới ta có nước chảy qua lỗ với vận tốc bằng:

$$v_{xuống} = \sqrt{2\left(g - 1{,}2\frac{m}{s^2}\right)H} \approx 2{,}27 \text{ m/s}. \qquad (3)$$

4.8. a) Gọi v_0 và v_{10} là vận tốc của nước trong bình (tức vận tốc giảm mực nước) và vận tốc chảy của nước qua lỗ khi vừa mở lỗ (vận tốc ban đầu); v_t và v_{1t} là vận tốc tương ứng của chúng tại thời điểm t.

Theo tính chất liên tục của chất lưu ta có:

$$v_0S = v_{10}S_1 \qquad (1)$$

$$v_tS = v_{1t}S_1 \qquad (2)$$

Còn vận tốc chảy của nước qua lỗ bằng:

$$v_{10} = \sqrt{2gh} \qquad (3)$$

$$v_{1t} = \sqrt{2gh_t} \qquad (4)$$

Thay (3) và (4) vào (1) và (2), ta được:

$$v_0 = \frac{S_1}{S}\sqrt{2gh} \quad (5)$$

$$v_t = \frac{S_1}{S}\sqrt{2gh_t} \quad (6)$$

Mặt khác, có thể coi chuyển động của nước trong bình là chuyển động thay đổi đều với gia tốc a và ta có:

$$v_t = v_0 + at \quad (7)$$

$$v_t^2 - v_0^2 = 2a(h - h_t) \quad (8)$$

Thay (5) và (6) vào (8), ta được: $\frac{S_1^2}{S^2}2g(h_t - h) = 2a(h - h_t)$

Từ đây suy ra: $a = -\frac{S_1^2}{S^2}g$. (9)

Thay tiếp (5), (6) và a từ (9) vào (7), ta được:

$$\frac{S_1}{S}\sqrt{2gh_t} = -\frac{S_1^2}{S^2}gt + \frac{S_1}{S}\sqrt{2gh}$$

$$\sqrt{2h_t} = \sqrt{2h} - \frac{S_1}{S}\sqrt{g}t$$

Do đó $$h_t = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2h} - \frac{S_1}{S}\sqrt{g}t\right)^2. \quad (10)$$

Công thức (10) biểu diễn sự phụ thuộc của độ cao mực nước vào thời gian.

b) Nước ở trong bình chảy ra hết sau thời gian $t = \tau$. Lúc này $h_\tau \equiv 0$.

Từ (10), ta có:

$$h_\tau \equiv 0 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2h} - \frac{S_1}{S}\sqrt{g}\tau\right)^2 \quad \rightarrow \quad \sqrt{2h} = \frac{S_1}{S}\sqrt{g}\tau$$

$$\tau = \frac{S}{S_1}\sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (11)$$

4.9. Gọi v là vận tốc chảy của chất lỏng qua lỗ khi mở lỗ. Ta có:

$$v = \sqrt{2gH} \quad (1)$$

Khi lỗ mở xuất hiện một xung lượng P bằng (giá trị tuyệt đối):

$$P = mv \quad (2)$$

Mặt khác, ta có khối lượng sau thời gian t:

$$m = V\rho = svt\rho \quad (3)$$

(V - thể tích chất lỏng chảy qua lỗ)

Thay (1) và (3) vào (2), ta được:

$$P = S\rho v^2 t = 2S\rho gHt \quad (4)$$

Theo định lý biến thiên xung lượng, lực tác dụng lên bình làm chiếc xe chuyển động theo chiều ngược với chiều phụt ra của chất lỏng khi mở lỗ có giá trị tuyệt đối bằng:

$$F = \frac{dP}{dt} = 2S\rho gH.$$

4.10. Gọi v_1 và v_2 là vận tốc nước chảy ở lỗ khoét ở đáy bình và lỗ khoét ở độ cao h khi mở các lỗ. Ta có:

$$v_1 = \sqrt{2gH} \quad (1)$$

$$v_2 = \sqrt{2g(H-h)} \quad (2)$$

Khi mở các lỗ sẽ xuất hiện các xung lượng tương ứng là P_1 và P_2. Tính tương tự như bài 8.9, ta được:

$$P_1 = 2S\rho gHt \quad (3)$$

$$P_2 = 2S\rho g(H - h)t \quad (4)$$

Và tương ứng các lực tác dụng lên bình là F_1và F_2 ngược chiều nhau và bằng (theo giá trị tuyệt đối):

$$F_1 = \frac{dP_1}{dt} = 2S\rho gH, \quad (5)$$

$$F_2 = \frac{dP_2}{dt} = 2S\rho g(H - h) \quad (6)$$

Lực tổng hợp tác dụng lên bình:

$$F = F_1 - F_2 = 2S\rho gh. \quad (7)$$

Mặt khác, theo định luật II của Newtơn:

$$F = aM \quad (8)$$

trong đó M là khối lượng nước ban đầu ở trong bình:

$$M = S_1H\rho \quad (9)$$

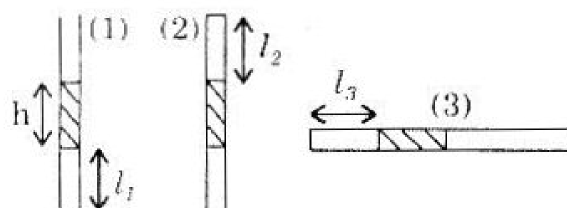
Từ (7), (8) và (9) ta thu được gia tốc của bình ngay sau khi mở các lỗ:

$$a = \frac{F}{M} = \frac{2Sgh}{S_1H} \cong 2.10^{-2}\ m/s^2.$$

5.1.

a) Đo áp suất bằng cmHg thì áp suất của không khí bị giam trong ba vị trí (1), (2), (3) tương ứng sẽ là $(P_0 + h)$, $(P_0 - h)$, P_0. Thể tích khí tỉ lệ với các chiều dài l_1, l_2, l_3. Theo định luật Bôi–Mariôt thì ta có phương trình (Vị trí (1) – (2) – (3)) :

$$(P_0 + h)l_1 = (P_0 - h)l_2 = P_0l_3$$



- Vị trí (1) – (2) :

Từ phương trình:

$$(P_0 + h)l_1 = (P_0 - h)l_2$$

$$\Rightarrow \quad P_0(l_2 - l_1) = h(l_1 + l_2)$$

$$P_0 = h\frac{(l_1 + l_2)}{(l_1 - l_2)} = \frac{12,5(5 + 7)}{(7 - 5)} = \frac{12,5.12}{2}$$

$$P_0 = 75 \text{ cmHg}$$

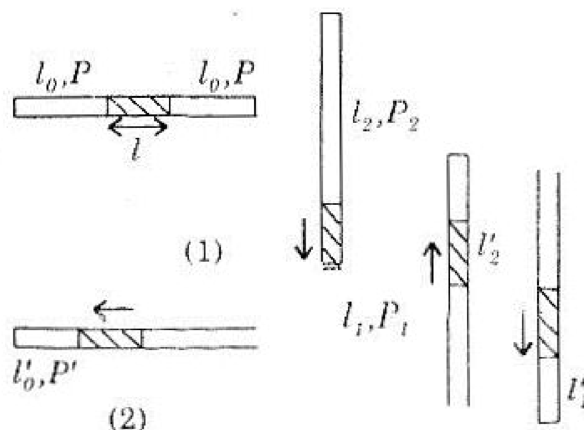
- Vị trí (1) – (3) :

b) Từ phương trình:

$$(P_0 + h)l_1 = P_0l_3 \quad \Rightarrow \quad l_3 = \frac{(P_0 + h)l_1}{P_0} = \frac{75 + 12,5)5}{75} = \frac{87,5}{75}$$

$$l_3 = 5,83 \text{ cm.}$$

5.2.



a) Gọi P là áp suất của không khí ở hai bên đoạn Hg, l_0 là chiều dài của mỗi phần ống chứa không khí khi ống nằm ngang; $l_0 = \dfrac{L - l}{2} = 20$ cm.

Gọi P_1, l_1 và P_2, l_2 là áp suất và chiều dài các phần dưới và trên không khí của ống đứng thẳng kín hai đầu. Ta có :

$$l_1 = l_0 - 6 \text{ cm} = 14 \text{ cm}; \qquad l_2 = l_0 + 6 \text{ cm} = 26 \text{ cm}$$

Theo định luật Bôi–Mariốt (Vị trí (1)) :

$$Pl_0 = P_1 l_1 = P_2 l_2$$

và các phương trình : $P_1 = P_2 + l$ (Vì ống kín !)

Từ đây :

$$\left.\begin{array}{l} Pl_0 = P_1 l_2 \\ P_1 = P_2 + L \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} Pl_0 = (P_2 + l)l_1 \\ Pl_0 = P_2 l_2 \end{array}\right\} \Rightarrow Pl_0 = \left(\frac{Pl_0}{l_2} + l\right)l_1$$

$$\Rightarrow \quad P\left(l_0 - \frac{l_0}{l_2}l_1\right) = ll_1 \quad \Rightarrow \quad Pl_0 = \frac{l_{l_1}}{1 - \frac{l_1}{l_2}}$$

$$P = \frac{\frac{l}{l_0}}{\frac{1}{l_1} - \frac{1}{l_2}} = \frac{\frac{10}{20}}{\frac{1}{14} - \frac{1}{26}} = \frac{0,5}{0,071 - 0,038} = \frac{0,5}{0,033}$$

P = 15,15 cm.

b) Gọi P', l'_0 là áp suất và chiều dài phần ống bên trái khi mở đầu ống bên phải và để ống nằm ngang. Hiển nhiên P' bằng áp suất khí quyển (Vị trí (2))

$$P_0 = P' = 76 \text{ cmHg}$$

Theo định luật Bôi–Mariốt : $Pl_0 = P'l'_0 \Rightarrow l_0 = \frac{Pl_0}{P'}$

$$l'_0 = \frac{15,2.20}{76} = 4\text{cm}$$

$l_0 - l'_0 = 20 - 4 = 16$ cm. Dịch sang trái 16 cm.

c) Ống đứng thẳng, ta mở đầu dưới. Phần trên có chiều dài l'_2, áp suất $P_0 - l$. Theo định luật Bôi–Mariốt:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Vị trí (1) – (3) :} & l_2 P_2 = l'_2(P_0 - l) \\ \text{Theo câu (1)} & P_2 l_2 = Pl_0 \Rightarrow P_2 = P\frac{l_0}{l_2} \end{array}\right\} \Rightarrow l'_2 = l_2.\frac{\frac{Pl_0}{l_2}}{P_0 - l} = \frac{Pl_0}{P_0 - l}$$

$$= \frac{15,2.20}{76 - 10} = \frac{304}{66}$$

$$l'_2 \approx 4,6 \text{ cm.}$$

$l_2 - l'_2 = 26 - 4,6 = 21,4$cm

Lên cao 21,4 cm.

Ống để thẳng đứng, ta mở đầu trên. Phần dưới bây giờ có chiều dài l'_1 và áp suất $P_0 + l$. Theo định luật Bôi – Mariốt (Vị trí (1) – (3)) :

$$\left.\begin{array}{l} P_1 l_1 = (P_0 + l\ )l'_1 \\ P l_0 = P_1 l_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad P\frac{l_0}{l_1}l_1 = (P_o + l)l_1$$

$$l'_1 = \frac{Pl_0}{P_0 + l} = \frac{15{,}2.20}{76 + 10} = \frac{304}{86} \approx 3{,}5\text{cm}$$

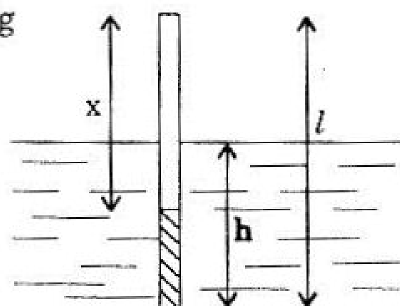
$l'_1 = 3{,}5$ cm;

$l_1 - l_1' = 14 - 3{,}5 = 10{,}5$ cm (Tụt xuống).

5.3. Ta đo áp suất bằng mHg nên đổi $P_0 = 10^5$ Pa $= 10^5$ N/m^2 thành:

$$P_0 = \frac{10^5 N/m^2}{dN/m^3} = \frac{10^5}{13{,}6.10^4} = 0{,}735\text{mHg}$$

$P_0 = 0{,}375$ mHg



Khi miệng ống bắt đầu đụng mặt thoáng thì không khí có áp suất P_0 và thể tích tỷ lệ chiều dài l của ống. Khi đã ngập sâu thì không khí có áp suất p và thể tích tỷ lệ với x. Vậy theo định luật Bôi – Mariốt ta có :

$$P_0 l = Px \qquad (1)$$

Mặt khác ta lại có :

$$P = P_0 + [h-(l-x)] = P_0 + h - l + x \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) : $\begin{cases} P_0 l = Px \\ P = P_0 + h - l + x \end{cases} \Rightarrow$ 2 ẩn P, x ?

$$\Rightarrow \quad P = P_0 + h - l + \frac{P_0 l}{P}$$

$$\Rightarrow \quad P^2 + (l - h - P_0)P - P_0 l = 0$$

$$P^2 - 0{,}585P - 0{,}66 = 0$$

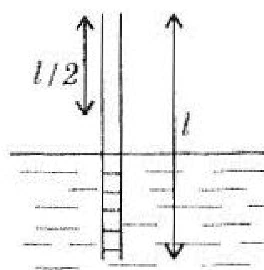
$$P_{1.2} = \frac{0{,}585 \pm \sqrt{0{,}585^2 + 4.0{,}66}}{2} = \frac{0{,}585 \pm \sqrt{2{,}982}}{2}$$

$$\approx \frac{0{,}585 \pm 1{,}727}{2} = \begin{cases} 1{,}1559 \approx 1{,}16 \text{ mHg} \\ -1{,}142 \text{ (bỏ)} \end{cases}$$

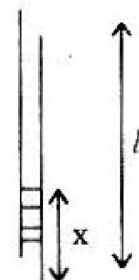
$P = 1{,}16$ mHg

$$x = \frac{P_0 l}{P} = \frac{0{,}735.0{,}9}{1{,}16} = 0{,}57 \text{ m}.$$

5.4. Gọi p là áp suất của không khí bị giam, x là chiều dài của cột Hg (Vị trí (2)). Trước khi bịt đầu trên, không khí có áp suất là P_0 và thể tích tỉ lệ với $\frac{1}{2}$. Về sau nó có áp suất P và thể tích tỉ lệ với $(l - x)$. Theo định luật Bôi – Mariốt :



(1)



(2)

$$\left.\begin{array}{l} P_0 \frac{l}{2} = P(l - x) \\ P = P_0 - x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{P_0 l}{2} = (P_0 - x)(l - x)$$

$$P_0 l = 2x^2 - 2(P_0 + l)x + 2P_0 l$$

$$2x^2 - 2(P_0 + l)x + P_0 l = 0$$

$$2x^2 - 3,52x + 0,76 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3,52 \pm \sqrt{3,52^2 - 4.2.0,76}}{2.2} = \frac{3,52 \pm \sqrt{6,3104}}{4}$$

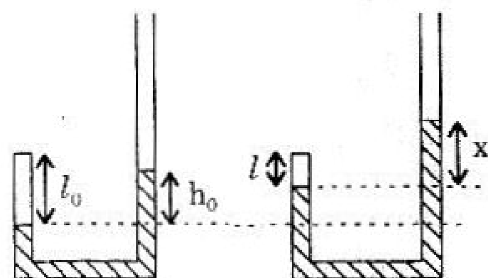
$$\approx \frac{3,52 \pm 2,51}{4} = \begin{cases} 1,508 \text{ m (bỏ vì} > l) \\ 0,252 \text{ m} \end{cases}$$

$$x = 0,25 \text{ m}$$

$$P = P_0 - x = 0,76 - 0,25 = 0,51 \text{ mHg}$$

$$P = 0,51 \text{ mHg.}$$

5.5. Gọi x là khoảng chênh hai mực thủy ngân sau khi đã đổ thêm Hg. Theo định luật Bôi – Mariốt ta có :



(1) (2)

$$(P_0 + h_0)l_0 = (P_0 + x)l$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{(P_0 + h_0)l_0 - P_0 l}{l}$$

$$x = \frac{(76 + 11).30 - 76.29}{29} = \frac{87.30 - 76.29}{29} = \frac{2610 - 2204}{29}$$

$$x = \frac{406}{29} = 14 \text{ cm .}$$

Mức bên trái cao thêm : $h_1 = l_0 - l = 30 - 29 = 1$ cm

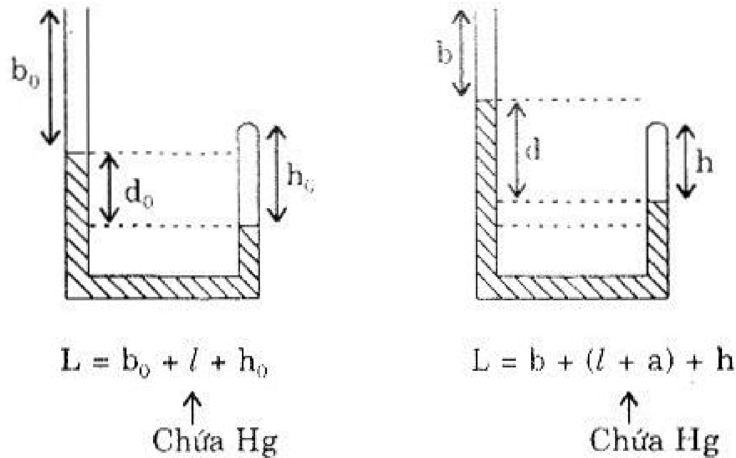
Mức bên phải cao thêm : $h_2 = x + (l_0 - l) - h_0$

$= 14 + (30-29) - 11 = 4$ cm

Lượng thủy ngân đổ thêm :

$$(h_1 + h_2)S = (1 + 4).1 = 5 \text{ cm}^3\text{Hg.}$$

5.6.



Gọi L là chiều dài của ống (kể cả hai nhánh và đoạn nằm ngang); gọi b_0 và l là chiều dài phần ống không chứa thủy ngân ở mặt thoáng ngoài và chiều dài phần ống chứa thủy ngân (Vị trí (1)) lúc trước khi đổ thêm Hg.

Gọi d là khoảng chênh lệch giữa hai mặt thoáng sau khi đổ thêm Hg; gọi b là chiều dài phần ống không chứa thủy ngân ở mặt thoáng ngoài (Vị trí (2)) sau khi đổ thêm Hg. Lúc đó $(l + a)$ là chiều dài phần ống chứa Hg sau khi đổ thêm Hg. Ta có :

$$\begin{cases} L = b_0 + l + h_0 \\ L = b + (l + a) + h \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad b_0 + l + h_0 = b + (l + a) + h \qquad (1)$$

$$d_0 + b_0 = d + b + (h_0 - h) \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có :

$$d_0 + [\, b + (l + a) + h - l - h_0 \,] = d + b + (h_0 - h)$$

$$d_0 + a + 2h - 2h_0 = d$$

$$14 + 6 + 2h - 2.30 = d$$

$$2h - 40 = d \qquad (3)$$

Theo định luật Bôi – Mariốt ta có (Vị trí (1) – (2)):

$$(P_0 + d_0)h_0 = (P_0 + d)h$$

$$2700 = (76 + d)h \qquad (4)$$

Từ hai phương trình (3) và (4), ta có :

$$2700 = (76 + 2h - 40)h$$

$$2h^2 + 36h - 2700 = 0$$

$$h^2 + 18h - 1350 = 0$$

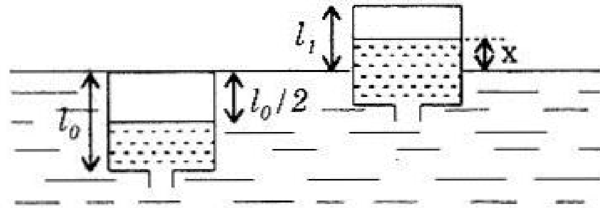
$$h_{1,2} = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 + 4.1350}}{2} = \frac{-18 \pm \sqrt{5724}}{2} = \frac{-18 \pm 75,657}{2}$$

$$= \begin{cases} 28,828 \text{ cmHg.} \\ -46,828 \text{ (bỏ nghiệm âm)} \end{cases}$$

$h = 28,8$ cm

$d = 2.28,8 - 40 = 57,6 - 40 = 17,6$ cm.

5.7 :



a) Ở vị trí ban đầu (1) không khí có thể tích tỉ lệ với $\frac{l_0}{2}$ và áp suất bằng $\left(P_0 + dg\frac{l_0}{2}\right)$. Ở vị trí (2), giả sử mực chất lỏng trong bình có chênh lệch x so với mặt thoáng. Thể tích của không khí tỉ lệ với $(l_1 - x)$ (với $x > 0$) và áp suất của không khí bằng $(P_0 - dgx)$. Theo định luật Bôi – Mariốt ta có :

$$\left(P_0 + dg\frac{l_0}{2}\right)\frac{l_0}{2} = (P_0 - dgx)(l_1 - x)$$

$$(9,4.10^4 + 800.10.\frac{0,2}{2})\frac{0,2}{2} = (9,4.10^4 - 800.10.x)(0,12 - x)$$

$$(9400 + 800)0,1 = (9400 - 8000x)(0,12 - x)$$

$$9480 = 11280 + 8000x^2 - 94000x - 960x$$

$$9480 = 11280 + 8000x^2 - 94960x$$

$$\Rightarrow \quad 8000x^2 - 94960x + 1800 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 80x^2 - 949,6x + 18 = 0$$

Phương trình gần đúng : $80x^2 - 950x + 18 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{950 \pm \sqrt{950^2 - 4.80.18}}{2.80} = \frac{950 \pm \sqrt{896740}}{160}$$

$$\approx \frac{950 \pm 946,96}{160} = \begin{cases} 11,856 \text{ m (bỏ do } > l_0) \\ 0,019 \text{ m} \end{cases}$$

$$\approx 1,9 \text{ cm.}$$

Áp suất trong bình :

$$P = P_0 - dgx = 9,4.10^4 - 800.10.0.019$$

$$P = 93848\ N/m^2 \approx 93850\ Pa$$

b) Ở nhiệt độ $T_0 = t_0 + 273 = 37 + 273 = 310$, kiểm soát không khí trong bình có áp suất P và thể tích tỉ lệ với $12 - 1,9 = 10,1$ cm (Vị trí (2)).

Giả sử ở nhiệt độ T', không còn chênh lệch các mức chất lỏng nữa thì tức là không khí có áp suất khí quyển và thể tích tỉ lệ với 12 cm.

Phương trình trạng thái cho ta:

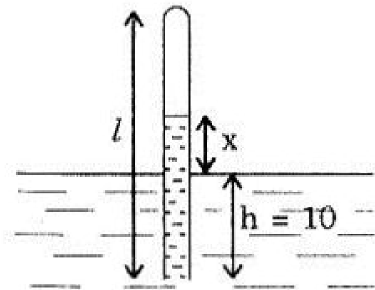
$$\frac{P.10,1}{310} = \frac{P_0.12}{T'}$$

$$\frac{93850.10,1}{310} = \frac{9,4.10^4.12}{T'} \Rightarrow T' = \frac{94000.12.310}{93850.10,1}$$

$$T' = \frac{9,4.12.310}{9,385.10,1} = 368,9 \approx 369\ K$$

$$T' = 370\ K.$$

5.8. Khi chưa mở nút, không khí có thể tích tỉ lệ với l, áp suất $P_0 = 10^3$cm H_2O, nhiệt độ $T_0 = 500$ Kiểm soát. Khi mở nút và ở nhiệt độ T = 300 Kiểm soát mực nước trong ống cao hơn mặt thoáng x cm, không khí có thể tích tỉ lệ với $(l - h - x) = (40 - x)$ áp suất $P = P_0 - x$. Từ phương trình trạng thái ta có:



$$\frac{P_0 l}{T_0} = \frac{(P_0 - x)(40 - x)}{T} \Rightarrow \frac{100.50}{500} = \frac{(1000 - x)(40 - x)}{300}$$

$$100.300 = (1000 - x)(40 - x)$$

$$30000 = 40000 - 1040x + x^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 1040x + 10000 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1040 \pm \sqrt{1040^2 - 4.10000}}{2} = \frac{1040 \pm 10^2\sqrt{10,4^2 - 4}}{2}$$

$$= \frac{1040 \pm 10^2\sqrt{104,16}}{2} = \frac{1040 \pm 10^2 10,206}{2}$$

$$= \frac{1040 \pm 1020,6}{2} = \begin{cases} 9,7\ cm \\ 1030,3\ cm\ (\text{b' do} > l) \end{cases}$$

$$x = 9,7\ cm.$$

5.9. Các quá trình 4–1, 2–3 là đẳng áp vì V tỉ lệ với T. Các quá trình 1–2, 3–4 là đẳng nhiệt vì $T_1 = 2T_4$, $T_2 = 2T_3$, nên từ phương trình trạng thái cho quá trình đẳng áp (định luật Gay – Luýxắc):

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_4}{T_4} \Rightarrow \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_4}{T_4} \Rightarrow V_4 = \frac{V_1T_4}{T_1} = \frac{V_1}{2}$$

$$V_4 = 20\ dm^3$$

$$\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_3}{T_3} \Rightarrow V_2 = \frac{V_3T_2}{T_3} = 20\ dm^3$$

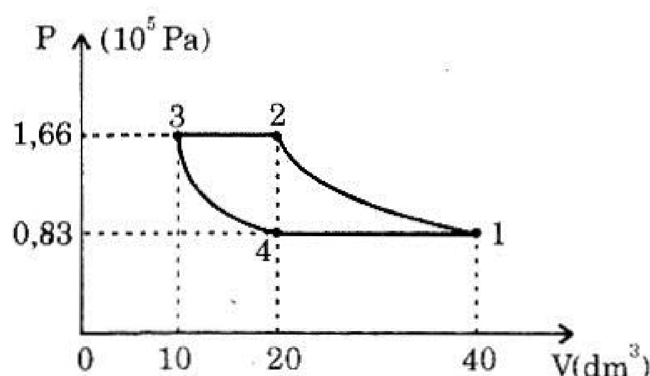
$$V_2 = 20\ dm^3$$

Từ phương trình trạng thái cho một mol khí:

$$P_1 = P_4 = \frac{RT_4}{V_1} = \frac{8,31.400}{0,04} = 0,83.10^5\,Pa$$

$$P_2 = P_3 = \frac{RT_2}{V_2} = \frac{8,31.400}{0,02} = 1,66.10^5\,Pa$$

Đồ thị P-V:



5.10. * Từ phương trình trạng thái cho một mol khí ta có:

$$T_4 = \frac{P_4V_4}{R} = \frac{10^5.0,00831}{8,31} = 100\ K$$

$$T_4 = 100\ K$$

$$T_1 = \frac{P_1V_1}{R} = \frac{4.10^5.0,00831}{8,31} = 400\ K$$

$$T_1 = 400\ K \Rightarrow T_1 = 4T_4$$

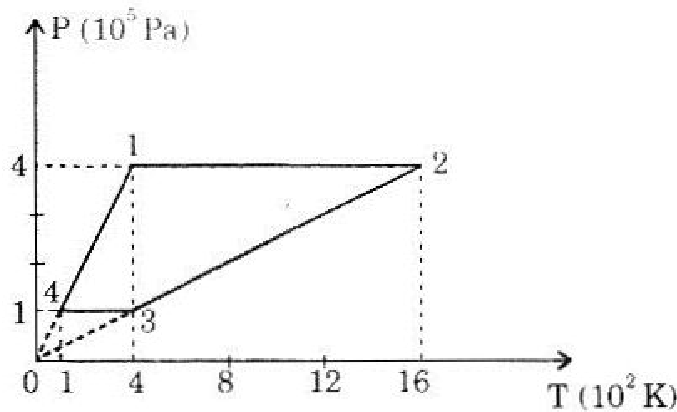
* $T_3 = T_1 \Rightarrow T_3 = 400\ K$ trên cùng một đường cong đẳng nhiệt.

* Vì $P_2 = 4P_4$, nên từ đường thẳng qua gốc tọa độ và qua 2-4, ta suy ra:

$$V_2 = V_3 = 4V_4 \quad (\text{hay} = 4V_1)$$

$$\Rightarrow V_2 = 8,31 \times 4 = 33,24\ dm^3$$

$$T_2 = \frac{P_2V_2}{R} = \frac{4.10^5.4.8,31.10^{-3}}{8,31} = 4T_1 = 1600 \text{ K}$$



5.11. Gọi V_1 là thể tích của bình có nhiệt độ $T_1 = 273 + t$; V_2 là thể tích của bình có nhiệt độ $T_2 = 273 - t$. Giọt thủy ngân khi đứng yên thì áp suất ở hai bình bằng nhau. Hai bình chứa cùng một khối lượng không khí, vậy:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} = \frac{V_1 + V_2}{T_1 + T_2} = \frac{2V_0}{273 + t + 273 - t} = \frac{V_0}{273} \quad \Rightarrow \quad V_1 = \frac{V_0T_1}{273}$$

$$V_1 - V_0 = \Delta V = V_0\left(\frac{T_1}{273} - 1\right) = \left(\frac{T_1 - 273}{273}\right)V_0$$

$$= \frac{V_0t}{273} = \frac{200t}{273} = Sd = 0,2.10 = 2$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{2.273}{200} = 2,73^\circ C.$$

5.12. Gọi n là số mol khí trong ba bình có thể tích $V_1 + V_2 + V_3 = 6V$, áp suất P_0 và nhiệt độ T_0, ta có :

$$n = \frac{6P_0V}{RT_0} \qquad (1)$$

Về sau bình 1 (thể tích V) chứa n_1 mol khí ở áp suất P và nhiệt độ $\frac{T_0}{2}$, ta có:

$$n_1 = \frac{2VP}{RT_0} \qquad (2)$$

Tương tự ta có: $n_2 = \frac{P.2V}{R.1,5T_0} = \frac{4PV}{3RT_0}$ (3)

$$n_3 = \frac{P.3V}{R.2T_0} = \frac{3PV}{2RT_0} \qquad (4)$$

Rõ ràng $n = n_1 + n_2 + n_3$

Từ (1) – (4) $\Rightarrow \quad \dfrac{6P_0V}{RT_0} = \dfrac{PV}{RT_0}\left(2 + \dfrac{4}{3} + \dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{29PV}{6RT_0} \Leftrightarrow \quad P = \dfrac{36}{29}P_0$.

5.13. Nếu gọi m là khối lượng bình rỗng thì không khí trong bình trước và sau là :

$$m_1 = M_1 - m, \qquad m_2 = M_2 - m$$

Từ phương trình trạng thái : $\dfrac{PV}{T} = \dfrac{m}{\mu}R$

Ta có : $\dfrac{P_1}{T_1m_1} = \dfrac{P_2}{T_2m_2} = \dfrac{R}{\mu V}$ (V: thể tích của bình)

$$\Rightarrow \quad \frac{m_1}{\frac{P_1}{T_1}} = \frac{m_2}{\frac{P_2}{T_2}} = \frac{m_1 - m_2}{\frac{P_1}{T_1} - \frac{P_2}{T_2}} = \frac{M_1 - M_2}{\frac{P_1T_2 - P_2T_1}{T_1T_2}} = \frac{T_1T_2(M_1 - M_2)}{P_1T_2 - P_2T_1}$$

$$\Rightarrow \quad m_2 = \frac{P_2T_1(M_1 - M_2)}{P_1T_2 - P_2T_1} = \frac{5.10^6.(50 - 49).310}{1,5.10^7.280 - 5.10^6.310}$$

$$= \frac{5.31}{28.1,5.10 - 5.31} = \frac{155}{265} \approx 0,585\text{kg}$$

$$m_1 = m_2 + (M_1 - M_2) = 0,585 + 1 = 1,585\text{kg}$$

Thể tích bình:

$$V = \frac{RT_1m_1}{P_1\mu} = \frac{RT_2m_2}{P_2\mu} = \frac{8,31.310.1,585}{1,5.10^7.0,032} = \frac{8,31.3,1.1,585}{15.320}$$

$$\approx 0,0085\text{m}^3 = 8,5\text{dm}^3 = 8,5\text{lít}$$

5.14. Lúc đầu, nhiệt độ $T_{tr}^{(1)} = T_d^{(1)} = T_1 = 400K$, ta có:

Gọi P_0 là áp suất do pittông nặng gây ra cho khí trong ngăn dưới. Ta có áp suất ngăn dưới :

$$P_2 = P_1 + P_0 = 2P_1 \quad \Rightarrow \quad P_0 = P_1 \qquad (1)$$

Gọi V_2 và V_1 là thể tích của 2 ngăn dưới và trên ở nhiệt độ lúc đầu $T_1 = 400K$. Ta có phương trình trạng thái cho 2 ngăn (n_1 và n_2 là số mol tương ứng)

$$\frac{P_1V_1}{T_{tr}^{(1)}n} = \frac{P_2V_2}{T_d^{(1)}n} = R \quad \Rightarrow \quad P_1V_1 = \frac{2P_1V_2}{3}$$

$$V_1 = \frac{2}{3}V_2 \quad \Rightarrow \quad V_2 = \frac{3}{2}V_1 \qquad (2)$$

Vậy nếu thể tích hai ngăn là 5V thì:

$$V_1 = 2V,\ V_2 = 3V \quad (3)$$

Khi thể tích hai ngăn bằng nhau $\Rightarrow V_1 = V_2' = 2{,}5V$ (4)

Nhiệt độ ngăn trên $T_{tr}^{(2)} = T_{tr}^{(2)} = 400K$ $\Rightarrow$ Nhiệt độ không đổi, ta có định luật Bôi – Mariốt cho ngăn trên :

$$P_1V_1 = P_1' = V_1' \quad \Rightarrow \quad P_1' = \frac{V_1}{V_1'}P_1 = \frac{2V}{2{,}5V}P_1$$

$$P_1' = \frac{4}{5}P_1 \quad (5)$$

(P'_1 và V'_1 là áp suất, thể tích mới ngăn trên)

Nhiệt độ ngăn dưới $T_d^{(2)}$ với thể tích V_2', P_2' $\Rightarrow$ cho ngăn dưới :

$$T_d^{(1)},\ V_2\ ,\ P_2 = 2P_1 \quad \Rightarrow \quad T_d^{(2)},\ V_2',\ P_2'$$

$$\frac{P_2V_2}{T_d^{(1)}} = \frac{P_2'V_2'}{T_d^{(2)}} \quad \Rightarrow \quad \frac{2P_1.V}{T_d^{(1)}} = \frac{P_2'.2{,}5V}{T_d^{(2)}}$$

$$P_2' = \frac{T_d^{(2)}}{T_d^{(1)}}.\frac{12}{5}P_1 \quad (6)$$

Mặt khác pittông cân bằng nghĩa là:

$$P_2' = P_1' + P_0 = P_1' + P_1 \quad (7)$$

Kết hợp (5),(6),(7) ta có:

$$\frac{T_d^{(2)}}{T_d^{(1)}}\cdot\frac{12}{5}P_1 = \frac{4}{5}P_1 + P_1$$

$$T_d^{(2)} = T_d^{(1)}.\frac{5}{12}\cdot\frac{9}{5} = \frac{3}{4}T_d^{(1)} = \frac{3}{4}\cdot 400 = 300K$$

$$T_d^{(2)} = 300K$$

5.15. a) Khóa ban đầu đóng sẽ mở khi $P_1 = P_2 + 10^5$Pa (P_2 ban đầu bằng 0) $\Rightarrow P_1 = P_m = 10^5$Pa. Cho đến khi khoá mở, khí trong bình 1 này bị nung nóng đẳng tích $\Rightarrow$ Định luật Sáclơ cho ta :

$$\frac{P_0}{T_0} = \frac{P_m}{T_m} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{T_m} = \frac{P_0}{T_0P_m} = \frac{0{,}9.10^5}{300.10^5} \quad \Rightarrow \quad T_m = \frac{300}{0{,}9} = 333\text{ K}$$

Khóa mở, một ít khí ở bình 1 lọt sang bình 2 làm cho áp suất ở binh1 (P_1) tụt xuống một ít ($\Delta P = P_1 - P_2$) bé hơn 10^5Pa một ít và khoá lại đóng lại. Nhưng tiếp tục nung thì P_1 lại tăng, khoá lại mở. Có thể coi như khoá luôn giữ cho chênh lệch áp suất $\Delta P = 10^5$Pa.

b) Tới nhiệt độ T = 500K thì áp suất trong bình 2 là P, trong bình 1 là $(P + \Delta P)$. Gọi n là tổng số mol khí, n_1 và n_2 là các số mol khí trong hai bình lúc cuối. Khi đó:

– Lúc đầu : Số mol khí bình 1 bằng n

Số mol khí bình 2 bằng 0

Phương trình trạng thái cho ta (đối với bình 1)

$$P_0V_1 = nRT_0 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{P_0V_1}{RT_0} \qquad (1)$$

– Lúc cuối, phương trình trạng thái cho đối với bình 1:

$$(P + \Delta P)V_1 = n_1RT \quad \Rightarrow \quad n_1 = \frac{(P + \Delta P)V_1}{RT} \qquad (2)$$

đối với bình 2 : $PV_2 = n_2RT \quad \Rightarrow \quad n_2 = \frac{PV_2}{RT}$ (3)

Từ (1) + (2) + (3) $\Rightarrow$ $n = n_1 + n_2$: bình

$$\frac{P_0V_1}{RT_0} = \frac{(P + \Delta P)V_1}{RT} + \frac{PV_2}{RT} = \frac{10^5.0,9.40}{3} = \frac{50P + 40.10^5}{5}$$

$$P = \frac{(12 - 8).10^5}{10} = 0,4.10^5$$

$$\begin{cases} \text{áp suất trong bình 2 là} : 0,4.10^5 \text{ Pa} \\ \text{áp suất trong bình 1 là} : (P + \Delta P) = 1,4.10^5 \text{ Pa.} \end{cases}$$

5.16. Vì thành hình trụ làm bằng vật liệu cách nhiệt nên dù với quá trình nào diễn ra với khí trong hình trụ khi trộn lẫn khí, định luật bảo toàn năng lượng luôn luôn đúng:

$$Cm_1(T - T_{1)} = Cm_2(T_2 - T_{1)} \qquad (1)$$

Trong đó C : là nhiệt dung riêng của chất khí, m_1 và m_2 là khối lượng khí tương ứng trong hai phần của hình trụ, T; nhiệt độ được thiết lập trong hình trụ khi cân bằng. Từ (1), ta có :

$$C\frac{m_1}{m_2}(T - T_1) = C(T_2 - T)$$

$$T\left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right) = \frac{m_1}{m_2}T_1 + T_2 = \frac{\left(\frac{m_1}{m_2}T_1 + T_2\right)}{\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)} \qquad (2)$$

Mặt khác, đối với khí trong hai phần của hình trụ trước khi bỏ bản cách nhiệt, ta có phương trình trạng thái :

$$\left.\begin{aligned} P_1V_1 &= \frac{m_1}{\mu}RT_1 \\ P_2V_2 &= \frac{m_2}{\mu}RT_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{P_1V_1}{P_2V_2} = \frac{m_1}{m_2}\cdot\frac{T_1}{T_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{P_1V_1T_2}{P_2V_2T_1}$$

Đặt (3) vào (2) ta có : $T = \dfrac{\dfrac{P_1V_1T_2}{P_2V_2 + T_2}}{1 + \left(\dfrac{P_1V_1T_2}{P_2V_2T_1}\right)} = \dfrac{T_1T_2(P_1V_1 + P_2V_2)}{P_1V_1T_2 + P_2V_2T_1}$.

5.17. a) Gọi m là khối lượng khí trong xilanh (thể tích v, áp suất P_K) μ: khối lượng mol của không khí. Ta có phương trình trạng thái cho không khí trong xilanh (T: nhiệt độ không khí):

$$P_K^v = \frac{m}{\mu}RT \qquad (1)$$

Tại một thời điểm nào đó, nếu M là khối lượng không khí trong bình (thể tích V, áp suất P), thì ta có phương trình trạng thái cho không khí trong bình :

$$PV = \frac{M}{\mu}RT \qquad (2)$$

Mỗi lần ấn pittông, ta đưa vào bình một lượng không khí nhất định, bằng m, tức khối lượng khí trong bình từ M thành (M + m) và áp suất tăng thêm ΔP. Vậy ta có phương trình trạng thái sau lần ấn pittông :

$$(P + \Delta P)V = \frac{M + m}{\mu}RT \qquad (3)$$

Đặt (1),(2) vào vế phải của (3), ta có :

$$(P + \Delta P)V = PV + P_K v \quad \Rightarrow \quad \Delta PV = P_K v$$

$$\Rightarrow \quad \Delta P = \frac{P_K v}{V} \qquad (4)$$

Tức sau mỗi lần ấn pittông áp suất tăng thêm $\Delta P = P_K v/V$. Suy ra số lần cần ấn pittông để áp suất trong bình từ P_0 thành P_c bằng :

$$n = \frac{P_C - P_0}{\Delta P} = \frac{(P_C - P_0)V}{P_K v} \qquad (5)$$

b) Gọi P là áp suất trong bình trước khi kéo pittông, M là khối lượng không khí trong đó. Ta có :

$$PV = \frac{M}{\mu}RT \qquad (6)$$

Khi kéo, thể tích V thành V+v, áp suất thành P', khối lượng không khí vẫn là M, Vậy ta có :

$$P'(V+v) = \frac{M}{\mu}RT \quad (7)$$

Đặt (6) vào vế phải của (7), ta có:

$$P'(V+v) = PV \quad \Rightarrow \quad \frac{P'}{P} = \frac{V}{(V+v)} \quad (8)$$

Tức sau mỗi lần kéo pittông thí áp suất lại giảm theo tỉ số $\left(\frac{V}{V+v}\right)$.

Nếu P_n là áp suất sau khi kéo n lần thì :

$$\frac{P_n}{P_0} = \frac{P_n}{P_{n-1}} \cdot \frac{P_{n-1}}{P_{n-2}} \cdots \frac{P_1}{P_0} = \left(\frac{V}{V+v}\right)^n \quad (9)$$

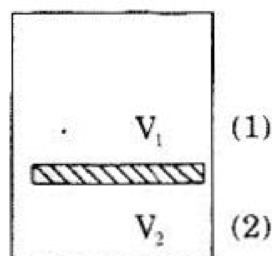
Nếu $\quad P_n = P_C = \frac{P_0}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{P_0}{r}}{P_0} = \left(\frac{V}{V+v}\right)^n$

$$\frac{1}{r} = \left(\frac{V}{V+v}\right)^n \quad \Rightarrow \quad r = \left(\frac{V+v}{V}\right)^n$$

$$\log r = n\log\left(\frac{V+v}{V}\right) \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\log r}{\log\left(\frac{V+v}{V}\right)} \quad (10)$$

Áp dụng bằng số : $n = \dfrac{\log 100}{\log\left(\dfrac{10v+v}{10v}\right)} = \dfrac{\log 100}{\log 1{,}1} = \dfrac{2}{0{,}041} \approx 48$ lần.

5.18. Gọi P_1 và P_2 là các áp suất ở nhiệt độ T, còn P_1' và P_2' là các áp suất ở nhiệt độ T' tương ứng với phần trên và dưới của V_1 xilanh.



Ta có :

(1) $P_2 - P_1 = P'_2 - P'_1 \equiv$ áp suất do pittông gây ra

(2) $V_1 + V_2 = V'_1 + V_2 \equiv$ thể tích xilanh.

Phương trình trạng thái ở nhiệt độ T:

$$\left.\begin{aligned} \text{Phần 1}: P_1V_1 = RT \\ \text{Phần 2}: P_2V_2 = RT \end{aligned}\right\} P_1V_1 = P_2V_2 = RT \quad (3)$$

Phương trình trạng thái ở nhiệt độ T':

$$\left.\begin{aligned} \text{Phần 1}: P_1'V_1' = RT' \\ \text{Phần 2}: P_2'V_2' = RT' \end{aligned}\right\} P_1'V_1' = P_2'V_2' = RT' \quad (4)$$

Từ (3) $\Rightarrow$ $\frac{P_2}{P_1} = \frac{V_1}{V_2} = n$ (5)

Từ (4) $\Rightarrow$ $\frac{P'_2}{P'_1} = \frac{V'_1}{V'_2} = x$ (6)

Thế (5), (6) vào (1), (2) $\Rightarrow$ $P_1(n-1) = P'_1(x-1)$ (7)

$$V_1(1 + \frac{1}{n}) = V'_1(1 + \frac{1}{x}) \quad (8)$$

Nhân (7) và (8) vế với vế :

$$P_1V_1(n-1)\left(1 + \frac{1}{n}\right) = P'_1V'_1(x-1)\left(1 + \frac{1}{x}\right) \quad (9)$$

Thế (3),(4) vào (9) :

$$RT(n-1)\left(1 + \frac{1}{n}\right) = RT'(x-1)\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{T}{T'}(n-1)\left(1 + \frac{1}{n}\right) = (x-1)\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{T}{T'}\left(n - \frac{1}{n}\right) = \left(x - \frac{1}{x}\right)$$

Đặt $a = \frac{T}{T'}\left(n - \frac{1}{n}\right)$ $\Rightarrow$ $x^2 - ax - 1 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}\left(a \pm \sqrt{a^2 + 4}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + 4}\right) \\ x = \frac{1}{2}\left(a - \sqrt{a^2 + 4}\right) < 0 \quad \text{(bỏ)} \end{cases}$$

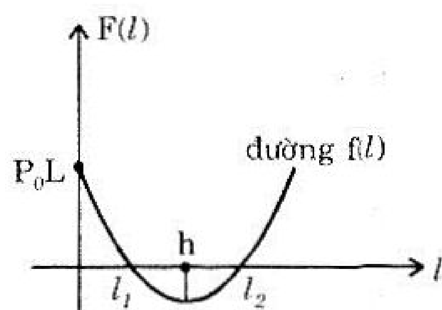
$$x = \frac{1}{2}\left[\frac{T}{T'}\left(n - \frac{1}{n}\right) + \sqrt{\frac{T^2}{T'^2}\left(n - \frac{1}{n}\right)^2 + 4}\right]$$

Áp dụng số : $n = 2$, $T' = 2T$ $\Rightarrow$ $a = \frac{T}{2T}\left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{\frac{9}{16} + 4} = \sqrt{\frac{73}{16}}$$

$$x = \frac{3 + \sqrt{73}}{8} \approx 1{,}44.$$

5.19. a) Khi ở trong Hg, khí chịu áp suất : $P_0 + dg(h - l)$ (với g là gia tốc trọng trường). Thể tích của khí tỷ lệ với chiều dài phần ống chứa khí nên định luật Bôi – Mariốt cho ta :



$$P_0L = [P_0 + dg(h - l)]l \qquad (1)$$

⇒ Ta có phương trình :

$$f(l) = dgl^2 - (P_0 + dgh)l + P_0L = 0 \qquad (2)$$

$$\Delta = (P_0 + dgh)^2 - 4dgP_0L > (P_0 + dgh)^2 - 4dgP_0h \quad (\text{do } h > l)$$

⇒ $\Delta > 0$ ⇒ Có hai nghiệm: $l_{1,2} = \frac{1}{2dg}\left[(P_0 + dgh) \pm \sqrt{\Delta}\right]$.

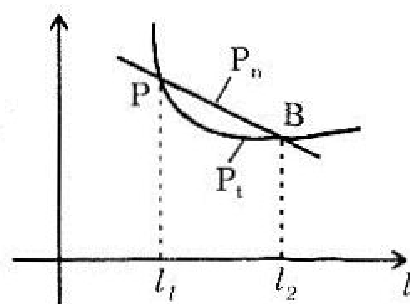
Ta bỏ nghiệm l_2 với dấu + vì $l_2 > h$. Thật vậy đường biểu diễn hàm f(l) có dạng (hình vẽ). Mặt khác khi $h = l$ ⇒ f(h) có dạng biểu thức âm :

$$f(h) = dgh^2 - (P_0 + gdh)h + P_0L = P_0(L - h) < 0 \qquad (\text{do } h > l)$$

Tức f(h) nằm kẹp giữa l_1 và l_2 trên đồ thị f(l). Dẫn đến: $l_1 < h < l_2$

Kết luận : $l = \frac{1}{2dg}\left[(P_0 + dgh) - \sqrt{(P_0 + dgh)^2 - 4dgP_0L}\right]$

b) Xét cân bằng của nút:



Áp suất bên ngoài là:

$$P_n = [P_0 + dg(h - l)] \qquad (4)$$

Áp suất bên trong là áp suất ứng với chiều dài l là nghiệm của phương trình (1) ⇒ Từ (1) và (4)

$$P_t = \frac{P_0L}{l} \qquad (5) \qquad (\text{Từ (1) } P_n = P_t)$$

(l_1 là cân bằng bền của nút)

Ở A nếu l tăng một chút thì $P_n > P_t$ nên P_n ấn nút trở về l_1, nếu l giảm một chút thì $P_t > P_n$ nên P_t kéo nút trở về l_1.

5.20. Gọi d_0 và d là các khối lượng riêng của không khí ở $T_0 = 300$ K và ở nhiệt độ cần thiết để khí cầu bắt đầu bay T. Khi bắt đầu bay, lực đẩy Acsimet d_0gV bằng tổng các trọng lượng của vỏ mg của không khí nóng trong khí cầu dgV. (g là gia tốc trọng trường)

$$d_0gV = mg + dgV \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \quad d = d_0 - \frac{m}{V} \qquad (2)$$

29 g không khí ở điều kiện tiêu chuẩn : 1 atm, $T_c = 273$ K, thể tích chiếm 22,4l bằng 22,4 dm^3 ⇒ khối lượng riêng ở đktc :

$$d_c = \frac{29}{22,4} \approx 1,295 \text{ g/dm}^3 = 1,295 \text{ kg/m}^3 \quad (3)$$

Áp suất không khí bên ngoài bằng áp suất ở đktc : 1 atm

⇒ theo định luật Gay – Luytxắc :

$$d_0T_0 = d_cT_c \quad \Rightarrow \quad d_0 = \frac{T_C}{T_0}d_C$$

Kết hợp (3) : $d_0 = \frac{273}{300}.1,295 = 1,178 \text{ kg/m}^3$ (4)

(2) + (4) ⇒ Ta có : $d = 1,178 - \frac{84\text{kg}}{336\text{m}^3}$

$$= 1,178 - 0,25 = 0,328 \text{ kg/m}^3 \quad (5)$$

Áp suất không khí bên ngoài bằng áp suất khí nóng trong khí cầu ⇒ Theo định luật Gay – Luyxắc :

$$d_0T_0 = dT \quad \Rightarrow \quad T = \frac{d_0}{d}T_0$$

$$T = \frac{1,178.300}{0,928} \approx 381 \text{ K} = 108^\circ \text{ C}.$$

5.21. Sau khi hợp hai bong bóng xà phòng thành một, khối lượng tổng cộng của không khí trong chúng không thay đổi. Gọi m_1, m_2 là khối lượng của hai bong bóng ban đầu, m_3 là khối lượng của bong bóng hợp thành:

$$m_3 = m_1 + m_2 \quad (1)$$

Từ phương trình Klapâyrông – Menđêlêép cho ta :

$$PV = \frac{m}{\mu}RT \quad \Rightarrow \quad m = \frac{PV\mu}{RT} \quad (2)$$

Trong (2) : $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ – Thể tích bong bóng,

μ : khối lượng phân tử khí,

T: nhiệt độ (bằng nhiệt độ của không khí bao quanh và như nhau cho mọi bong bóng)

R : hằng số khí.

Điều kiện cân bằng của bong bóng cho ta:

$$P = P_a + P_{bóng} = P_a + \frac{2\sigma}{R} \quad (3)$$

Trong (3) : P_a : áp suất khí quyển,

$P_{bóng}$: áp suất ở chính dưới bề mặt hình cầu của màng xà phòng bán kính R.

Từ (2) và (3) ta có:

$$m_1 = \left(P_a + \frac{2\sigma}{R_1}\right)\frac{4}{3}\pi R_1^3 . \frac{\mu}{RT}$$

$$m_2 = \left(P_a + \frac{2\sigma}{R_2}\right)\frac{4}{3}\pi R_2^3 . \frac{\mu}{RT}$$

$$m_3 = \left(P_a + \frac{2\sigma}{R_3}\right)\frac{4}{3}\pi R_3^3 . \frac{\mu}{RT}$$

$$\Rightarrow \quad \left(P_a + \frac{2\sigma}{R_3}\right)\frac{4}{3}\pi R_3^3 . \frac{\mu}{RT} =$$

$$= \left(P_a + \frac{2\sigma}{R_1}\right)\frac{4}{3}\pi R_1^3 . \frac{\mu}{RT} + \left(P_a + \frac{2\sigma}{R_2}\right)\frac{4}{3}\pi R_2^3 . \frac{\mu}{RT}$$

$$P_a(R_3^3 - R_2^3 - R_1^3) = 2\sigma(R_1^2 + R_2^2 - R_3^2)$$

$$P_a = \frac{2\sigma(R_1^2 + R_2^2 - R_3^2)}{(R_3^3 - R_2^3 - R_1^3)}.$$

5.22. a) Bóng lơ lửng khi lực đẩy Acsimet $V_0 d_K g$ bằng tổng trọng lượng của vỏ bóng mg và khí hiđrô $V_0 d_H g$ (V_0 – thể tích bóng, d_K và d_H là các khối lượng riêng của không khí và hiđrô, g – gia tốc trọng trường)

$$V_0 d_K g = mg + V_0 d_H g$$

$$m = V_0(d_K - d_H) \quad (1)$$

Phương trình trạng thái cho ta:

$$PV = \frac{m}{\mu}RT \quad \Rightarrow \quad P = \frac{d}{\mu}RT \quad \Rightarrow \quad d = \frac{P\mu}{RT}$$

$$\Rightarrow \quad d_K = \frac{P_0 \mu_K}{RT_0} = \frac{10^5.0,029}{8,31.300} = 1,163 \text{ kg/m}^3 \quad (2)$$

$$\Rightarrow \quad d_H = \frac{P_0 \mu_H}{RT_0} = \frac{10^5.0,002}{8,31.300} = 0.08 \text{ kg/m}^3 \quad (3)$$

$$\Rightarrow \quad V_0 = \frac{m}{d_K - d_H} = \frac{0.005}{1,163 - 0.08} = \frac{0,005}{1,083} \approx 0,00462 \text{ m}^3 = 4,62 \text{ dm}^3$$

$$\frac{4}{3}\pi R_0^3 = V_0 \quad \Rightarrow \quad R_0 = \sqrt[3]{\frac{3}{4}\frac{V_0}{\pi}} \approx 1\,\text{dm} \qquad (4)$$

b) Để có thể bay tới độ cao đã nêu thì bóng phải thỏa mãn điều kiện lơ lửng ở độ cao ấy, nghĩa là :

$$V(d'_K - d'_H) = m \qquad (5)$$

ở T_0 : $$(d_K - d_H) = \frac{P_0(\mu_K - \mu_H)}{RT_0}$$

ở T : $$(d'_K - d'_H) = \frac{P(\mu_K - \mu_H)}{RT} \quad \Rightarrow \quad \frac{(d'_K - d'_H)}{(d_K - d_H)} = \frac{P}{P_0}\frac{T_0}{T}$$

$$d'_K - d'_H = \frac{P}{P_0}\frac{T_0}{T}(d_K - d_H) \qquad (6)$$

$$d'_K - d'_H = \frac{0{,}5P_0}{P_0}\cdot\frac{300}{280}(1{,}163 - 0{,}08)$$

$$= 0{,}536.1{,}083 = 0{,}58\ \text{kg/m}^3 \qquad (7)$$

Thay (7) vào (5) $\Rightarrow$ $V = \dfrac{0{,}005}{0{,}58} = 0{,}00862\ \text{m}^3 = 8{,}62\ \text{dm}^3$

Mà $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow R = \sqrt[3]{\dfrac{3}{4}\dfrac{V}{\pi}} \approx 1{,}3\ \text{dm}$

1,3 dm < 1,5 dm : bóng không vỡ, bay được !

5.23. $\mu_1 = 28$ g/mol, $\mu_2 = 2$ g/mol.

Ban đầu trong bình có:

$$\frac{m_1}{28}\ \text{mol}\ N_2 \quad \text{và} \quad \frac{m_2}{2}\ \text{mol}\ H_2$$

– Ở nhiệt độ T ta có:

$$2\frac{m_1}{28}\ \text{mol N} \quad \text{và} \quad \frac{m_2}{2}\ \text{mol}\ H_2$$

$$PV = \left(2\frac{m_1}{28} + \frac{m_2}{2}\right)RT \qquad (1)$$

(P là áp suất ở T, V là thể tích bình)

– Ở nhiệt độ 2T ta có:

$$2\frac{m_1}{28}\ \text{mol N} \quad \text{và} \quad \frac{m_2}{2}\ \text{mol H}$$

$$3PV = \left(2.\frac{m_1}{28} + 2.\frac{m_2}{2}\right)R2T \qquad (2)$$

Chia (2) cho (1) ta có :

$$3 = \frac{\frac{m_1}{7} + 2m_2}{\frac{m_1}{14} + \frac{m_2}{2}} = \frac{2m_1 + 28m_2}{m_1 + 7m_2} \qquad (3)$$

Chia (3) cho m_2 ta có : $\left(x = \frac{m_1}{m_2}\right)$

$$3 = \frac{2\left(\frac{m_1}{m_2}\right) + 28}{\left(\frac{m_1}{m_2}\right) + 7} = \frac{2x + 28}{x + 7} \quad \Rightarrow \quad 3(x + 7) = 2x + 28 \quad \Rightarrow \quad x = 7.$$

5.24. a) Tính áp suất ban đầu :

– của chất 1 : $P_1 = \frac{n_1RT}{V_0} = \frac{0,5.8,31.300}{0,2} = 6232,5$ Pa

– của chất 2 : $P_2 = \frac{n_2RT}{V_0} = \frac{0,4.8,31.300}{0,2} = 4986$ Pa

Theo định luật Đalton, áp suất của hỗn hợp là :

$$P = P_1 + P_2 = 6232,5 + 4986 = 11218,5 \text{ Pa}$$

b) Khi nén đến V_A thì chất 1 bắt đầu ngưng tụ:

$$V_A = \frac{n_1RT}{P_{b1}} = \frac{0,5.8,31.300}{0,83.10^4} = 0,150\text{m}^3 = 150\text{dm}^3$$

Lúc đó chất 2 vẫn là hơi và có áp suất:

$$P_{2A} = \frac{n_2RT}{V_A} = \frac{0,4.8,31.300}{0,150} = 6648 \text{ Pa}$$

Áp suất của hỗn hợp :

$$P_A = P_{1b} + P_{2A} = 0,83.10^4 + 6648 = 14948 \text{ Pa}$$

Khi tới thể tích V_B thì chất 2 ngưng tụ :

$$V_B = \frac{n_2RT}{P_{b2}} = \frac{0,4.8,31.300}{1,66.10^4} = 0,06 \text{ m}^3 = 60 \text{ dm}^3$$

Áp suất hỗn hợp lúc đó đến cuối không đổi và bằng tổng hai áp suất bão hoà

$$P_C = P_{b1} + P_{b2} = (0,83 + 1,66).10^4 \text{ Pa} = 24900 \text{ Pa}.$$

c) Lúc cuối xilanh có thể tích V_c thì số mol hơi bão hoà của chất 1 là :

$$n'_1 = \frac{P_{b1}V_C}{RT} = \frac{0,83.10^4.0,03}{8,31.300} \approx 0,1 \text{ mol}$$

(bỏ qua thể tích của chất lỏng 1)

Nghĩa là có : $n_1 - n_1' = 0,5 - 0,1 = 0,4$ mol

Chất lỏng 1 có khối lượng : $m_1 = 0,4.0,02 = 0,008$ kg

$$m = m_1 + m_2 = 0,016 \text{ kg chất lỏng.}$$

5.25. Giải thích :

Áp suất trong chất lỏng ở bề mặt của nó trong bình nhỏ khi cân bằng áp suất của không khí có trong bình nhỏ. Để cho áp suất của không khí không thay đổi thì thể tích của nó phải không đổi (Bỏ qua sự thay đổi về nhiệt độ khi băng tan).

Nước tạo thành khi băng tan chiếm một thể tích bằng thể tích của phần băng ban đầu nằm dưới nước. Nếu như mức nước trong bình bé không thay đổi thì thể tích của khí trong bình tăng lên và áp suất khí giảm đi. Vì vậy trong quá trình băng tan: mức nước trong bình bé tăng lên, còn mức nước trong bình lớn giảm đi.

5.26. – Gọi M_0 là khối lượng của toàn bộ không khí.

– Ở t = – 139° + 273 = 180 Kiểm soát, có lượng khí hiđrô là $M = M_0 - 2$, thể tích khí chiếm là:

$$V = V_0 - v = V_0 - \frac{m}{C} \quad \text{(v: thể tích chất hấp thụ chiếm)}$$

$$\Rightarrow \quad V = 1,1 \text{ dm}^3 - 0,1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ dm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3.$$

$$v = \frac{100}{1} = 100 \text{ cm}^3.$$

Ta có phương trình trạng thái :

$$\frac{PV}{TM} = \frac{R}{\mu} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \quad M = \frac{PV\mu}{RT} = \frac{2.10^4.10^{-3}.0,002}{8,31.180} \approx 27.10^{-6} \text{kg}$$

$$M = 0,027 \text{ g}, M_0 = 2,027 \text{ g}$$

– Ở $T_1 = 273 + 37 = 310$ K toàn bộ hiđrô là khí $\Rightarrow M_0$ vẫn chiếm thể tích V (Vì vẫn còn chất hấp thụ) nhưng có áp suất $P_1 \Rightarrow$ Ta có phương trình trạng thái :

$$\frac{P_1V}{M_0T_1} = \frac{R}{\mu}$$

Từ (1) vă (2), ta có: $$\frac{P_1V}{M_0T_1} = \frac{PV}{TM}$$

$$\Rightarrow \quad P_1 = \frac{PM_0T_1}{TM} = \frac{2.10^4 2,027.310}{180.0,027} \approx 258,6.10^4\,Pa.$$

5.27. Bóng lên tới độ cao mà lực đẩy Acsimet bằng tổng trọng lượng của vỏ và khí hiđro :

$$Vdg = Mg + m_Hg \qquad (1)$$

d – là khối lượng riêng của không khí, m – là khối lượng hiđrô trong bóng ở áp suất P và nhiệt độ T ứng với độ cao bóng tới.

Gọi m là khối lượng không khí có thể tích V cùng ở điều kiện T và V:

$$m = Vd \qquad (2)$$

$$(2) \Rightarrow (1) \quad \Rightarrow \quad Vd = M + m_H \quad \Rightarrow \quad m = M + m_H \qquad (3)$$

Áp dụng phương trình trạng thái cho khối lượng không khí m và hiđrô m, ta có :

$$PV = \frac{m}{\mu}RT = \frac{m_H}{\mu_H}RT \qquad (4)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m}{\mu} = \frac{m_H}{\mu_H} = \frac{m - m_H}{\mu - \mu_H} = \frac{\mu}{\mu - \mu_H} = \frac{7}{0,027} = 259\text{ mol} \qquad (5)$$

$$(5) + (4) \quad \Rightarrow \quad P = \frac{m}{\mu V}RT = \frac{259.8,31.218}{75} = 6256\text{ (Pa)}$$

So với áp suất mặt đất thì áp suất khí quyển giảm :

$$\frac{P_0}{P} = \frac{10^5}{6256} \approx 16 \text{ lần} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow \quad h = 4.5 = 20\text{km}.$$

5.28. Gọi N là số phân tử nước bay vào trong 1s bằng 1/6 số phân tử nước nằm trong hình trụ có tiết diện 1 m^2 và chiều dài bằng v/t TB $\bar{v}$:

$$N = \frac{1}{6}n\bar{v} \qquad (1)$$

(n – mật độ phân tử hơi nước bão hoà)

Từ phương trình cơ bản : $p = \frac{2}{3}nW_d = \frac{2}{3}n.\frac{3}{2}KT = nKT$ (2)

$$(1) + (2) \Rightarrow \quad N = \frac{1}{6}\frac{P}{KT}\bar{v} = \frac{1}{6}\frac{P}{KT}\sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = \frac{P}{K}\sqrt{\frac{3RT}{36T^2\mu}} = \frac{P}{K}\sqrt{\frac{R}{12T\mu}} \quad (3)$$

Số phân tử hơi nước bay vào = số phân tử hơi nước bay ra khi có hiện tượng bão hoà. Gọi M là khối lượng nước bay hơi ra trong 1 giây từ 1 m^2 mặt hồ.

$$\Rightarrow \quad M = Nm_{\mu} = N\frac{\mu}{A} \qquad (A - \text{số Avôgađrô}) \qquad (4)$$

$$(2) + (4) \Rightarrow M = \frac{P}{K}\sqrt{\frac{R}{12T\mu}}\frac{\mu}{A} = P\sqrt{\frac{R\mu^2A^2}{A^2 12T\mu R^2}} = P\sqrt{\frac{\mu}{12TR}}$$

$M \approx 27$ kg/giây.

5.29. – Trạng thái dừng thì số phân tử khí không đổi, tức số phân tử khí đi ra bằng số phân tử khí đi vào.

– Gọi : s – diện tích lỗ, N số phân tử khí đi vào trong 1 giây.

$$N = \frac{1}{6}ns\bar{v} = \frac{1}{6}ns\sqrt{\frac{3RT}{\mu}} \qquad (1)$$

$$P = nKT \quad \Rightarrow \quad N = \frac{1}{6}\cdot\frac{P}{KT}\cdot s\sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = \frac{P}{K}s\sqrt{\frac{R}{12\mu T}} \qquad (2)$$

Tương tự phân tử khí đi ra: $N_1 = \frac{P_1}{K}s\sqrt{\frac{R}{12\mu 4T}}$ (3)

Từ $N = N_1$ ở trạng thái dừng : $P_1 = 2P$.

5.30. – Ở trạng thái dừng, số phân tử khí ở B và tổng động năng của chúng không đổi.

– Tương tự bài 29 ta có :

Số phân tử từ A → B : $N_A = a\cdot\frac{P}{\sqrt{T}}$ $\left(a = \frac{s}{K}\sqrt{\frac{R}{12\mu}}\right)$

Số phân tử từ C → B : $N_C = a\cdot\frac{P}{\sqrt{2T}}$

Số phân tử rời B qua 2 lỗ : $N_B = 2.a\frac{P_1}{\sqrt{T_1}}$

⇒ Phương trình cân bằng số phân tử :

$$N_B = N_A + N_C \quad \Rightarrow \quad 2\frac{P_1}{\sqrt{T_1}} = \frac{P}{\sqrt{T}} + \frac{P}{\sqrt{2T}} \qquad (1)$$

– Động năng do N_A, N_C mang tới bằng N_B mang đi :

– Động năng mỗi phần tử : $\frac{3}{2}KT = W_d$

$$\Rightarrow \quad W_A = bTN_A \quad (b = \frac{3}{2}K) \quad \Rightarrow \quad W_A = abP\frac{T}{\sqrt{T}}$$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} W_A &= \alpha..p\sqrt{T} \\ W_C &= \alpha..p\sqrt{2T} \\ W_B &= 2\alpha..p_1\sqrt{T_1} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad W_B = W_A + W_C$$

$$2P_1\sqrt{T_1} = P\sqrt{T} + P\sqrt{2T} \qquad (2)$$

Ta có hệ phương trình đối P_1, T_1 sau :

$$\begin{cases} \dfrac{2P_1}{\sqrt{T_1}} = \dfrac{P}{\sqrt{T}} + \dfrac{P}{\sqrt{2T}} & (3) \\ 2P_1\sqrt{T_1} = P\sqrt{T} + P\sqrt{2T} & (4) \end{cases}$$

$$(3) \times (4) \quad \Rightarrow \quad 4P_1^2 = \frac{(\sqrt{2}+1)P.P\sqrt{T}(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}\sqrt{T}} = \frac{P^2(1+\sqrt{2})^2}{\sqrt{2}}$$

$$P_1 = \frac{P(1+\sqrt{2})}{2\sqrt[4]{2}} \qquad (5)$$

Thế (5) vào (4) : $2.\frac{P(1+\sqrt{2})}{2.\sqrt[4]{2}}\sqrt{T_1} = P\sqrt{T}(1+\sqrt{2})$

$$\frac{\sqrt{T_1}}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt{T} \quad \rightarrow \quad T_1 = \sqrt{2}T.$$

5.31. Băng đồng ở ngoài : r_1

Băng sắt ở trong : r_2

Góc chung của 2 cung : φ

Ở 200°C:

Chiều dài ở nhiệt độ t = 200°C đối với :

– Băng đồng : $l_1 = r_1\varphi = l_0(1 + \alpha t)$ (1)

– Băng sắt : $l_2 = r_2\varphi = l_0(1 + \beta t)$ (2)

Từ (1) và (2) ta có : $\varphi = \frac{l_0(1+\alpha t)}{r_1} = \frac{l_0(1+\beta t}{r_2}$

$$\rightarrow \quad \frac{1+\alpha t}{r_1} = \frac{1+\beta t}{r_2} \qquad (3)$$

Từ (3) ta lại có theo tính chất tỷ lệ thức :

$$A = \frac{(\alpha - \beta)t}{r_1 - r_2} = \frac{1 + \alpha t}{r_1} = \frac{1 + \beta t}{r_2} \quad (4)$$

$$A = \frac{(1,7 - 1,2)10^{-5}.200}{3\ (mm)} = \frac{10^{-3}}{3(mm)}$$

$$r_1 = \frac{1 + \alpha t}{A} = \frac{3(1 + 1,7.10^{-5}.200}{10^{-3}} = \frac{3.1,0034}{10^{-3}} \approx 3010\ mm$$

$r_1 = 3010$ mm.

5.32. – Gọi D là trọng lượng riêng của chất rắn và d là trọng lượng riêng của chất lỏng.

– Ở 0°C, có 98% chất rắn bị ngập nghĩa là :

$$D_0 = 0,98\ d_0 \quad (1)$$

(D_0 là D ở 0°C, d_0 là d ở 0°C).

– Gọi V_0 là thể tích của vật ở 0°C thì thể tích ở t = 25°C là $V = V_0(1 + 25\alpha)$. Nếu n là tỷ lệ phần thì thể tích phần ngập bằng nV.

– Ta có mối liên hệ giữa trọng riêng ở 0°C và t°C :

$$\left.\begin{array}{l} d_0 v_0 = dv = g \ \text{(khối lượng chất lỏng)} \\ v = v_0(1 + \beta t) \end{array}\right\} \rightarrow \frac{v}{v_0} = (1 + \beta t)$$

$$\frac{d_0}{d} = \frac{v}{v_0} = (1 + \beta t) \quad \Rightarrow \quad d = \frac{d_0}{1 + \beta t} \quad (2)$$

Tương tự cho chất rắn : $D = \dfrac{D_0}{1 + \alpha t}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) : $d = \dfrac{D_0}{0,98(1 + \beta t)} = \dfrac{D(1 + \alpha t)}{0,98(1 + \beta t)}$ (4)

– Khi vật nổi lực đẩy Acsimet (nVd) bằng trọng lượng của vật (VD):

$$nVd = VD \quad (5)$$

Từ (4), (5), ta có : $nVd = nV\dfrac{D(1 + \alpha t)}{0,98(1 + \beta t)} = VD$

$$\Rightarrow \quad n = \frac{0,98(1 + \beta t)}{1 + \alpha t} = \frac{0,98.1,0205}{1,0009} \approx 1.$$

Kết luận : n_1 có nghĩa là vật lơ lửng trong chất lỏng và 100% ngập trong nước.

5.33. – Ở t = 20°C, ta gọi V và W là thể tích của chất lỏng và dung tích của bình. Vì ở t = 20°C bình chứa đầy chất lỏng nên V = W. Ta có :

$$V_0(1 + \beta t) = W_0(1 + 3\alpha t) \qquad (1)$$

Trong (1) V_0 và W_0 là thể tích của chất lỏng và dung tích bình ở 0°C.

– Gọi d và d_0 là khối lượng riêng của chất lỏng ở t = 20°C và 0°C, ta có :

$$d = \frac{m}{V} = \frac{d_0}{1 + \beta t} \qquad (2)$$

– Ở t_1 = 80°C, bình có dung tích :

$$W_1 = W_0(1 + 3\alpha t_1)$$

Do W_1 cũng là thể tích của khối lượng $m_1 = (m - 3) = 76$ kg chất lỏng nên khối lượng riêng của chất lỏng ở t_1 bằng :

$$d_1 = \frac{m_1}{W_1} = \frac{m_1}{W_0(1 + 3 + \alpha t_1)} \qquad (3)$$

Thay W_0 từ (1) vào (3) ta có :

$$d_1 = \frac{m_1(1 + 3\alpha t)}{v_0(1 + \beta t)(1 + 3\alpha t_1)} \qquad (4)$$

Mặt khác tương tự như (2) ta có :

$$d_1 = \frac{d_0}{1 + \beta t_1} \quad \Rightarrow \quad \text{thay } d_0 \text{ từ 2 ta có :}$$

$$d_1 = \frac{m(1 + \beta t)}{V(1 + \beta t_1)} = \frac{m(1 + \beta t)}{V_0(1 + \beta t)(1 + \beta t_1)} = \frac{m}{V_0(1 + \beta t_1)}$$

– Cân bằng (4) và (5) ta có :

$$\frac{m}{V_0(1 + \beta t_1)} = \frac{m_1(1 + 3\alpha t)}{V_0(1 + \beta t)(1 + 3\alpha t_1)}$$

Trong gần đúng bỏ qua số lượng nhỏ chứa αβ, ta có :

$$\frac{m}{1 + \beta t_1} = \frac{m_1(1 + 3\alpha t)}{1 + \beta t + 3\alpha t_1} = \frac{m_1 + 3\alpha t m_1}{1 + \beta t + 3\alpha t_1}$$

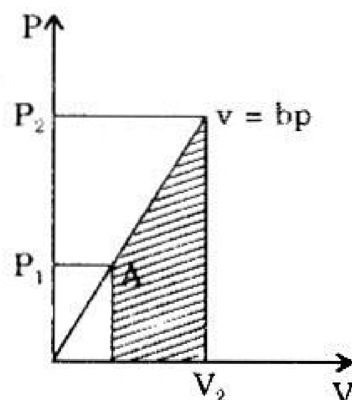
$$m + m\beta t + 3m\alpha t_1 \approx m_1 + m_1\beta t_1 + 3\alpha t m_1$$

$$\beta = \frac{m - m_1 + 3\alpha(mt_1 - m_1 t)}{m_1 t_1 - mt}$$

Thay số ta tính được $\beta \approx 7.10^{-4}$ K^{-1}

($\beta > 3\alpha$, chất lỏng dãn nở nhiều hơn bình nên mới tràn ra).

5.34. Theo nguyên lý 1 của NĐLH :



$$\Delta U = Q - A \qquad (1)$$

Quy luật dãn nở của khí cho ta :

Công sinh ra là diện tích hình thang gạch chéo :

$$A_i = P_i \Delta V_i$$

$$A = \sum A_i = \sum dt = dththg$$

$$A = \frac{P_1 + P_2}{2}(V_2 - V_1) = \frac{(P_1 + P_2)}{2}(P_2 - P_1)$$

$$= \frac{b}{2}(P_2^2 - P_1^2) \qquad (2)$$

Mặt khác ta có phương trình trạng thái :

$$PV = RT \rightarrow bp^2 = RT$$

$$\Delta TR = (T2 - T)R = b(P_2^2 - P_1^2) \rightarrow \Delta T = \frac{b}{R}(P_2^2 - P_1^2)$$

Theo định nghĩa C_V và từ (1), (2), (3) ta có :

QT đẳng tính $\Delta U = Q = C_v \Delta T$

$$C_v = \frac{\Delta U}{\Delta T} = \frac{Q - \frac{b}{2}(P_2^2 - P_1^2)}{\frac{b}{R}(P_2^2 - P_1^2)} = \frac{RQ - \frac{bR}{2}(P_2^2 - P_1^2)}{b(P_2^2 - P_1^2)}$$

$$\Rightarrow \quad b = \frac{RQ}{[C_v(P_2^2 - P_1^2) + \frac{R}{2}(P_2^2 - P_1^2)]} = \frac{2RQ}{(2Cv + R)(P_2^2 - P_1^2)}.$$

5.35. Gọi T_1 và T_2 là các nhiệt độ tuyệt đối của N_2 và A_2 khi chưa mở khóa. Ta có:

Số mol N_2 là : $\dfrac{m_1}{\mu_1} = \dfrac{P_1V_1}{RT_1}$

Số mol A_2 là : $\dfrac{m_2}{\mu_2} = \dfrac{P_2V_2}{RT_2}$

$A = 0 \rightarrow \quad Q = U$

Nội năng của N_2 là : $V_1 = \dfrac{m_1}{\mu_1} C_1T_1 = C_1 \dfrac{P_1V_1}{R} = \dfrac{5P_1V_1}{2}$

Nội năng của A_2 là : $V_2 = \dfrac{m_2}{\mu_2} C_2T_2 = C_2 \dfrac{P_2V_2}{R} = \dfrac{3P_2V_2}{2}$

Khi mở khóa, khí dãn nở không sinh công, hai bình lại cách nhiệt nên nội năng của hệ được bảo toàn.

$$U = V_1 + V_2 = \frac{5}{2}P_1V_1 + \frac{3}{2}P_2V_2 = 39,375.10^5 J \qquad (1)$$

Mặt khác, nếu gọi T và C là nhiệt độ và nhiệt dung của hỗn hợp khí, thì :

$$U = CT = \frac{5}{2}P_1V_1 + \frac{3}{2}P_2V_2.$$

$$C = \frac{m_1}{\mu_1}C_1 + \frac{m2}{\mu_2}C_2$$

$$= (600.2,5 + 30.1,5)8,31 = 0,1284.10^5 J/K \qquad (2)$$

Từ (1), (2) ta có nhiệt độ của hỗn hợp sau khi mở khóa

$$T = \frac{U}{C} = \frac{39,375}{0,1284} = 306,7K$$

Mặt khác, từ phương trình trạng thái chung cho hỗn hợp khí ta có áp suất sau khi mở khóa : $\left(n_1 = \frac{m_1}{\mu_1}; n_2 = \frac{m_2}{\mu_2}\right)$

$$\Rightarrow \quad P = (n_1 + n_2)\frac{RT}{(V_1 + V_2))} = 2,14.10^6 Pa.$$

5.36. – Số mol khí trong bóng là : $n = \frac{Pv}{RT}$

$$P = 2.\ 10^5 Pa$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}.3,14.\frac{(22)^3}{8}.10^{-6} = 557.10^{-5} m^3$$

$$T = 273 + 27 = 300^0K \quad \rightarrow \quad n = 0,447 \text{ mol}$$

– Khi bóng tiếp đất, nó bị bẹp, khí trong bóng bị nén đẳng tích và đoạn nhiệt theo nguyên lý 1 của NĐLH, công A biến thành độ tăng nội năng.

$$A = \Delta U = nC_v\Delta T \quad \rightarrow \quad \Delta T = \frac{A}{nC_V}$$

$$A = mgh = 0,8.10.25 = 200J$$

$$C_V = \frac{5}{2}R = 20,8J/mol\ K$$

$$\Delta T = \frac{200}{0,447.20,8} = 21,5K$$

Suy ra : $T_{sau} = 300 + 21,5 = 321,5^0K$ hay $48,5^0C$.

5.337. Khi mở khóa K, khí trong bình dãn nở đoạn nhiệt và lạnh đi, áp suất của khí bằng áp suất khí quyển H; sau đó nó tăng dần nhiệt độ đến nhiệt độ ban đầu ở thể tích không đổi.

– Trong quá trình thứ nhất :

$$T^{\upsilon}.p^{1-\upsilon} = C^{te} \quad \rightarrow \quad \frac{T_1}{T_0} = \frac{P_0^{\frac{1-\upsilon}{\upsilon}}}{P_1^{\frac{1-\upsilon}{\upsilon}}}$$

$$\frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{H + dgh}{H}\right)^{\frac{1-\upsilon}{\upsilon}} = \left(1 + \frac{dgh}{H}\right)^{\frac{1}{\upsilon} - 1} \qquad (1)$$

T_0, T_1 là nhiệt độ trước và ngay sau khi mở khóa; H – áp suất khí quyển; d – khối lượng riêng chất lỏng.

– Trong quá trình thứ hai :

$$\frac{P}{T} = hs \quad \rightarrow \quad \frac{P_1'}{T_1} = \frac{P_0'}{T_0}$$

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{P_1'}{P_0'} = \frac{H}{H + dgh'} = \frac{1}{1 + \frac{dgh'}{H}} \qquad (2)$$

Vì : $\frac{dgh}{H}, \frac{dgh'}{H}$ nhỏ $\Rightarrow$ có thể tích gần đúng: $(1 + \varepsilon)^n = 1 + \varepsilon$

$\Rightarrow$ Từ (1), (2), (3) ta có : $\frac{T_1}{T_0} = \left(1 + \frac{dgh}{H}\right)^{\frac{1}{\upsilon} - 1} = \left(1 + \frac{dgh'}{H}\right)^{-1}$

$$\Rightarrow \quad 1 + \frac{dgh}{H}\left(\frac{1}{\upsilon} - 1\right) = 1 - \frac{dgh'}{H}$$

$$\upsilon = \frac{h}{h - h'}.$$

5.338. Khi nhiệt độ là T_1, khí có áp suất:

$$P_1 = \frac{RT_1}{V} \qquad (1)$$

áp lực P_1S của khí cân bằng với lực đàn hồi của lò xo :

$$P_1S = kx \quad (x \text{ – là độ co của lò xo}) \qquad (2)$$

ở nhiệt độ T_2, áp suất tăng lên :

$$P_2 = \frac{RT_2}{V} \qquad (3)$$

và lò xo có độ co là (x + l) và khí thoát ra. Ta có:

$$P_2S = k\,(x + l) \qquad (4)$$

Từ (2) và (4) ta có :

$$(P_2 - P_1)\,S = Kl \qquad (5)$$

Thay (1), (3) vào (5) ta có :

$$S\left(\frac{RT_2}{V} - \frac{RT_1}{V}\right) = Kl \quad \rightarrow \quad T_2 = T_1 + \frac{Klv}{SR}$$

5.39. Theo định luật Đalton ban đầu ta có :

$$P = P_A + P_H \qquad (1)$$

(P_A, P_H tương ứng là áp suất riêng ban đầu của A_r về H)

Sự khuyếch tán của H ngừng khi mật độ phân tử H ở hai phần bằng nhau, tức khi mỗi phần chứa khối lượng H bằng $\frac{1}{2}m_H$ (thể tích hai phần bằng nhau). Áp suất của H trong phần bên trái P_H và theo định luật Dalton ta có :

$$P' = P_A + \frac{1}{2}P_H = \frac{2}{3}P \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có :

$$(1) - (2) = \frac{1}{3}P = \frac{1}{2}P_H \quad \rightarrow \quad P_H = \frac{2}{3}P\,; \quad P_A = \frac{1}{3}P \qquad (3)$$

Mặt khác ta có : $P_AV = \frac{m_A}{\mu_A}RT$, $P_HV = \frac{m_H}{\mu_H}RT$ (4)

Từ (3), (4) ta có:

$$\frac{m_A}{m_H} = \frac{\mu_A}{\mu_H}.\frac{P_A}{P_H} = 20.\frac{1}{2} = 10 \quad \Rightarrow \quad \frac{m_A}{m_H} = 10.$$

5.40. Vì quả cầu lơ lửng trong không khí nên khối lượng riêng d của chất khí trong quả cầu bằng khối lượng riêng của không khí. Ta tìm khối lượng mol μ của chất khí ấy. Giả sử nó có áp suất P và nhiệt.

$$VP = \frac{m}{\mu}RT \rightarrow p = \frac{d}{\mu}RT \qquad (1)$$

Đối với không khí cũng có áp suất P và

$$P = \frac{d}{\mu_0}RT_0 \quad \text{với} \quad T_0 = 20 + 273 = 293^0K \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có : $\mu = \frac{T\mu_0}{T_0} = \frac{873.29}{293} = 86,4g/mol$

Mặt khác theo lý thuyết thì :

$$\mu = 14 + 18n \Rightarrow 14 + 18n = 86,4$$

$$\Rightarrow 18n \approx 72,4 \Rightarrow n = 4.$$

5.41. Khi 2 giọt Hg tiếp xúc, khuynh hướng giảm mặt ngoài làm chúng trở thành một giọt, 2 giọt có diện tích mặt ngoài:

$$S = 2.4\Pi r^2 \approx 6,28\, mm^2 \quad (1)$$

Giọt lớn có diện tích mặt ngoài:

$$S' = 4\Pi R^2 \quad (2)$$

Điều kiện thể tích không đổi cho ta tính R:

$$V = 2.\frac{4}{3}\Pi r^2 = \frac{4}{3}\Pi R^3 -> R = r\sqrt[3]{2}$$

$$R \approx 0,5.1,26 \approx 0,63mm \quad (3)$$

Thay (3) vào (2) ta có. $S' = 4,98mm^2$ (4)

Độ giảm diện tích là: $\Delta S = S - S' \approx 1,3mm^2$ (5)

Năng lượng mặt ngoài giảm một lượng $E = c\Delta S$ vì không có truyền nhiệt cho môi trường ngoài và hệ cường không sinh công (thể tích không đổi nên E chuyển thành nội năng của hệ nghĩa là làm nhiệt độ tăng một lượng Δt ta có:

$$E = c\Delta S = a.M.\Delta t \quad (6)$$

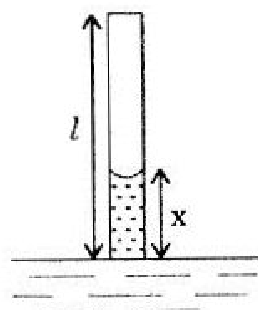
(M – là khối lượng thủy ngân).

$$M = m_0 v \approx 14,24.\ 10^{-6}\ kg \quad (7)$$

Thay $c = 0,47$ N/m $= 0,47$ J/m^2, (5), (7) và $a = 138$J/kg vào (6) ta có:

$$\Delta t = \frac{0,61.10^{-6}}{138.14,24.10^{-6}} \approx 3.10^{-4} K.$$

5.42. Gọi P' là áp suất trong ống, P là áp suất khí quyển, l là chiều dài ống, x là độ cao của nước trong ống. Ta có:



$$pl = p'(l - x) \quad (1)$$

$$p' = \frac{2c}{R} + dgx + p \quad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow$ $pl = \left(\frac{2c}{R} + dgx + p\right)(l - x)$

$$\Rightarrow \quad \frac{2c}{R}l - \frac{2c}{R} - pl - px - dgx^2 + x(dgl + \frac{2c}{R} + p) - \frac{2c}{R}l = 0$$

với $d = 1000 kg/m^3$, $g = 10 m/s^2$, $l = 0,2m$,

$R = 5.10^{-4}m$, $p = 10^5 N/m^2$.

Giải phương trình và bỏ nghiệm không thích hợp (> 0,2).

Ta thu được: x = 0,76 mm.

5.43. Từ phương trình trạng thái $pv = \frac{m}{\mu}RT$, giả sử có hơi nước bão hòa là khí lý tưởng . Khi đó khối lượng riêng của hơi nước được tính theo công thức:

$$d = \frac{m}{v} = \frac{p\mu}{RT}$$

$$d_1 = \frac{p\mu}{RT_1} = \frac{2,6.10^3.0,6.0,018}{8,31.925} \text{ kg/m}^3$$

$$d_2 = \frac{P_2\mu}{RT_2} = \frac{1,2.10^3.0,018}{8,31.28,3} \text{kg/m}^3$$

$$d_1 - d_2 = 11,45.10^{-3} \text{kg/m}^3 - 9,2.10^{-3} \text{kg/m}^3$$

$$= 2,25.10^{-3} \text{kg/m}^3 = 2,25 \text{ g/m}^3.$$

5.44. Gọi x là nhiệt độ cuối cùng của hệ. Thành phần của hệ phụ thuộc giá trị của x. Giả sử x <100°C và hệ chỉ gồm nước + chì đặc. Khi đó nhiệt lượng tỏa:

$$Q_{Chì} = Q_{Chì\ đđ} + Q_{Chì\ ở\ x^0C}$$

$$= 2000.21 + 200.0,125\ (327 - x)$$

$$= 4200KJ + 8175KJ - 25x\ KJ$$

$$= (12375 - 25x)\ KJ \qquad (1)$$

Và nhiệt lượng thu:

$$Q_{nước} = Q_{đá\ chảy} + Q_{nước\ ở\ X^0C}$$

$$= 330.1 + 21.4,19(x - 0) = (330 + 88x)\ KJ \qquad (2)$$

Cân bằng (1) = (2):

$$12375 - 25x = 330 + 88x \quad \Rightarrow \quad x \approx 106^0C$$

$\Rightarrow$ trái giả thiết.

Giả sử: x = 100°C và hệ gồm chì đặc, nước sôi và hơi nước.

Khi đó từ (1) với x = 100°C $\Rightarrow$ $Q_{chì\ toả} = 9875$ KJ.

$$Q_{nước\ thu} = Q_{nước\ ở\ 100C} + Q_{đá\ tan} = 8800kJ + 330KJ = 9130\ KJ.$$

Còn: (9875 – 9130) KJ = 745 KJ làm cho nước hoá hơi.

$$\left.\begin{array}{l} m_{Hơi} = \dfrac{745}{2260} \approx 0{,}33kg \\ m_{nước} = 21 - 0{,}33 = 20{,}67\ kg \end{array}\right\} \text{ở } 100^0C$$

m chì đặc = 200kg.

5.45.

$$\begin{aligned} Q_{toả} &= Q_{hơi \to khí\ ở\ 100C} + Q_{ngưng\ tụ\ của\ nước} + Q_{100C \to x^0C} \\ &= 0{,}2(150 - 100).1{,}97 + 0{,}2.2260 \\ &= 0{,}2(100 - x).4{,}19 \\ &= 19{,}7KJ + 452KJ + 83{,}8KJ - 0{,}838x\ KJ \\ &= (555{,}5 - 0{,}838x)\ KJ \qquad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{thu} &= Q_{nước\ đá\ tan} + Q_{nước\ lên\ X^0C} + Q_{bình\ từ\ 0^0C \to X^0C} \\ &= 0{,}5.330 + 2{,}5(x - 0)4{,}19 + 0{,}63x\ KJ \\ &= (165KJ + 10{,}475x)KJ + 0{,}63x\ KJ \\ &\approx 165\ KJ + 11{,}1\ KJ \qquad (2) \end{aligned}$$

Cân bằng (1) và (2):

$$555{,}5 - 0{,}838x = 165 + 11{,}1x \quad \Rightarrow \quad x \approx 33^0C \text{ (nước ở } 33^0C).$$

5.46. Các quá trình vật lý xảy ra theo trình tự thời gian:

0 – 1 phút (OM): sưởi nóng nước đá và chất rắn A

1 – 2 phút 40 (MN): chất rắn A nóng chảy.

2phút 40 – 4 phút (NP): sưởi nóng nước đá và chất lỏng

Trên 4 phút (PQ): nước đá tan

Vậy ta gọi Q là công suất bếp sưởi, L_A là nhiệt nóng chảy của chất rắn A, $C_L$là nhiệt dung riêng của chất lỏng A sau khi nóng chảy. Ta có:

$$OM \quad \Rightarrow \quad (c_d + c)(-20 + 40) = 60Q \qquad (1)$$

$$MN \quad \Rightarrow \quad L_A = 100Q \qquad (2)$$

$$NP \quad \Rightarrow \quad (c_d + c_L)(\,0 + 20) = 80Q \qquad (3)$$

Từ(1): $3.10^3 J/kg.K\ 20K = 60Q \quad \Rightarrow \quad Q = 10^3W = 1kW$

Thay $Q = 1kW$ vào (2): $L_A = 105\ J/kg$ $(J/kg = W)$.

Từ (3) sau khi thay $Q = 10^3 J/kg$, $c_d = 2.10^3\ J/kg.K$

$$(2.\ 10^3 + C_L)\ 20 = 80.10^3$$

$$C_L = 4.10^3 - 2.10^3 = 2.\ 10^3\ J/kg.K.$$

5.47. a) Cứ mỗi vòng quay của bánh đà, thể tích hơi nạp vào xi lanh là:

$$2.0{,}4.0{,}2 = 0{,}16\ m^3$$

Mỗi giờ bánh đà quay 70.60 = 4200 vòng, thể tích hơi là 4200.0,16 = 672m^3, có khối lượng 3,66 + 672 = 2460 kg. Đó cũng là khối lượng nước tiêu thụ (hoá hơi) mỗi giờ.

b) Mỗi giây có $\frac{2460}{3600} = 0,683$kg nước rút từ buồng ngưng đưa sang là để nâng lên nhiệt độ 165° C (vẫn là nước nhưng áp suất cao) rồi hoá hơi ở nhiệt độ đó. Lượng nhiệt tốn để hoá hơi 0,683kg nước của buồng ngưng là (trong 1 giây):

$$Q_1 = 0,683\,(4,19\,(165 - 45) + 2050) = 1743 \text{ KJ}.$$

Công sinh ra: A = 150KJ $\Rightarrow$ hiệu suất thực:

$$h = \frac{150}{1743} = 0,086\% = 8,6\%$$

Hiệu suất lý tưởng:

$$h_{lt} = \frac{(273 + 165) - (273 + 45)}{(273 + 165)} = 27,4\%.$$

5.48. a) Trường hợp 1: $V_1 = \frac{RT_1}{P_1} = \frac{8,31.600}{10^5} \approx 0,05m^3$

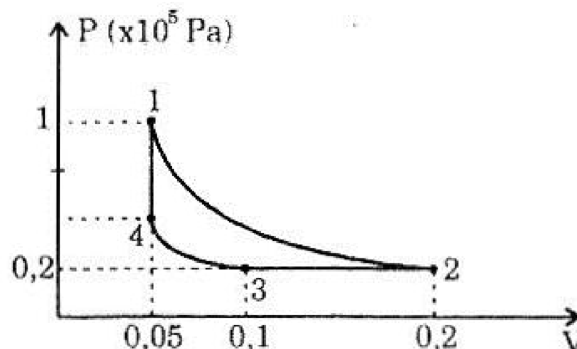
+ 1 $\Rightarrow$ 2 là đẳng nhiệt: $V_2 = \frac{P_1V_1}{P_2} = \frac{10^5.0,05}{2,5.10^4} = 0,2$

2 – 3 là đẳng áp: $V_3 = \frac{RT_3}{P_3} = \frac{8,31.3000}{2,5.10^4} = 0,1m^3$

+ 3 $\Rightarrow$ 4 là đẳng nhiệt: $V_4 = V_1 = 0,05m^3$

$$P_4 = \frac{P_3V_3}{V_4} = \frac{2,5.10^4.0,1}{0,05} = 5.10^4 \text{ Pa}$$

Đồ Thị P – V



b) Công và nhiệt:

+ 1 $\Rightarrow$ 2: Nhiệt nhận Q_1 để khí dãn nở bằng công sinh A_a

$$\Rightarrow Q_1 = A_1 = RT_1 \ln\frac{0,2}{0,05} = RT_1 \ln 4 = 8,31.6000.1,386 = 6911J$$

+ 2 $\Rightarrow$ 3: khí co nén đẳng áp nên công nhận

$$A_2 = -P_2dv = -2,5.10^4 . 0.1 = -2500J$$

đồng thời khí tỏa nhiệt:

$$Q_2 = -C_p\Delta t = -(C_V + R)\Delta t = -(2,5 R + R).3000$$
$$= -3,5R.3000 = -3,5.8,31.3000 = -8726J$$

+ 3 – 4: Khí Co nén đẳng nhiệt nên nhật công và toả nhiệt. Công nhận bằng nhiệt toả:

$$A_3 = Q_3 = -RT_3\ln\frac{0,1}{0,05} = -8,31.300.\ln 2 = -1728J.$$

+ 4 $\Rightarrow$ 1: Sự nung đẳng tích để khí nhận nhiệt nâng cao áp suất.

$$Q_4 = C_V.\Delta t = 2,5R.300 = 2,5.8,31.300 = 6232J$$

Vậy trong cả chu trình khí nhận nhiệt bằng Q.

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4$$
$$= (6911 - 8726 - 1728 + 6232)J = 2689J \qquad (*)$$

Và khí sinh công bằng A:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = (6911 - 2500 - 1728)J = 2683J \qquad (**)$$

Về nguyên tắc: Công sinh ra bằng nhiệt nhận vào: (*) = (**), nhưng ở đây có sai số do R lấy gần đúng ($R \approx 8,31448J/mol.K$).

5.49. a) $$p = \frac{2}{3}n_0wd, \quad p = n_0KT \quad \Rightarrow \quad n_0 = \frac{p}{KT} \qquad (1)$$

$$W_d = \frac{3}{2}KT$$

$$\left.\begin{array}{l} p = 10^{-11}\ mmHg = 10^{-11}.133,3\ N/m^2 \\ K = 1,38.10^{-23}\ J/K;\ T = (273 + 10)^0K \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có :

$$n_0 = \frac{10^{-11}.133,3}{1,38.10^{-23}.283} \approx 0,34.10^{12}\,J$$

$$\Rightarrow \quad \overline{W_d} = 0,586.10^{-20}(J)$$

b) $$n_0 = \frac{p}{kT} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{P}{n_0K} \quad \Rightarrow \quad n'_0 = 2n_0, p = cons$$

$$\Rightarrow \quad T' = \frac{1}{2}T = \frac{283}{2} = 141,5^0K$$

Từ phương trình trạng thái:

$$\frac{PV}{T} = \frac{PV'}{T'} \Rightarrow \frac{V}{T} = \frac{V}{\frac{1}{2}T} \Rightarrow V = 2V'$$

$$\Rightarrow V' = \frac{1}{2}V_2 \frac{10}{2} = 5l.$$

5.50. – Khối lượng riêng của hơi nước bão hoà ở $T_1 = 293^0K$ (20^0C) là d_1:

$$d_1 = \frac{0,8p.\mu}{R.T_1} = 0,017kg/m^3.$$

– Khối lượng riêng của hơi nước trong đám mây là d:

$$d = 0,8.d_1 = 0,0136\ kg/m^3.$$

– Khối lượng riêng của hơi nước bão hoà ở $T_2 = 278^0K$. (5^0C) là d_2:

$$d_2 = \frac{p_2\mu}{RT_2} = 0,0068kg/m^3$$

Suy ra, trong 1 m^3 2 K^2 lạp nước ngưng tụ rơi xuống là:

$$\Delta d = d - d_2 = 0,0068kg/m^3$$

ứng với $1m^2$ trên mặt đất có thể tích mây (K^2) là:

$$1m^2.5000m = 5000m^3 \text{ mây}$$

⇒ trút xuống 1 khối lượng nước là: $\Delta m = \Delta d.5000 = 34kg$

⇒ thành lớp nước dầy: $l = \dfrac{34dm^3}{10^2dm^2} = 0,34(dm)$.

5.51. a) Áp suất hơi nước trong khí quyển ở t_1:

$$P'_1 = 0,8\ .\ 7400 = 5920pa$$

Khối lượng riêng của hơi nước ở $t_1 = 313^0 K$ là:

$$d_1 = \frac{m_1}{V_1} = \frac{P'_1 M}{RT_1} = \frac{5920.0,018}{8,31.313} = 0,04kg/m^3$$

ở máy, không khí có nhiệt độ $T_2 = 278^0K$ nên khối lượng riêng của hơi nước tối đa bằng khối lượng riêng của hơi bão hoà ở T_2:

$$d = \frac{P_2\mu}{RT_2} = \frac{780.0,018}{8,13.278} = 0,0068kg/m^3$$

Lượng nước ngưng tụ trong $1m^3$ là:

$$\Delta d = 0,041 - 0,0068 = 0,034kg/m^3$$

Suy ra lượng hơi nước ngưng tụ mỗi giây ở máy là:

$$\Delta m = 3,\ \Delta d = 3.0,034 = 0,102\text{kg}$$

b) Sau một thời gian không khí trong phòng là không khí đã đi qua máy nghĩa là hơi nước có khối lượng riêng $d_2 = 0,0068\text{kg/m}^3$.

Ở $T_3 = 298\text{K}$, khối lượng riêng của hơi nước bão hoà là:

$$d_3 = \frac{3190.0,018}{8,31.298} = 0,023\text{kg}/\text{m}^3$$

Vậy độ ẩm trong phòng là: $\frac{d_2}{d_3} = \frac{0,0068}{0,023} = 29,6\%$.

5.52. a) Tính gia tốc trọng trường gHN (HN: t2, HCM: t1):

$$\frac{T_d}{T_3} = \sqrt{\frac{l_d}{l_S}.\frac{g_{HN}}{g_{HCM}}} = \sqrt{\frac{l_0(1+\alpha t_0)}{l_0(1+\alpha t_2}.\frac{g_{HN}}{g_{HCM}}}$$

$$\approx \left[1 + \frac{\alpha}{2}(t_1 - t_2)\right]\left(1 + \frac{\Delta g}{2g_{HCM}}\right) \approx 1 + \frac{\alpha}{2}\Delta t - \frac{\Delta g}{2g_{HCM}}$$

$$\frac{T_d}{T_3} = \frac{T_d}{T_S} - 1 = \frac{\Delta T}{T_S} = \frac{\alpha}{2}\Delta t + \frac{\Delta g}{2g_{HCM}} \qquad (1)$$

Thời gian nhanh trong 1 ngày đêm: $\phi = 24.60.60\frac{|\Delta T|}{T_{nS}}$

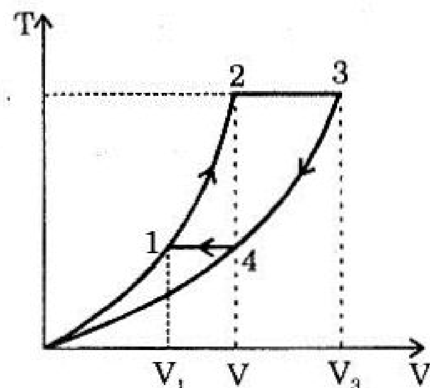
Do đồng hồ nhanh: $\Delta T = T_d - T_S > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta T}{T_S} = \frac{\phi}{24.60.60} \qquad (2)$

Từ (1) và (2) $\quad \Leftrightarrow \quad \frac{\phi}{24.60.60} = \frac{\alpha}{2}\Delta t + \frac{\Delta g}{2g_{HCM}}$

$$\Delta g = \left(-\frac{\alpha}{2}\Delta t + \frac{\phi}{24.60.60}\right)2g_{HCM} \approx 58,7.10^{-4}\ (\text{m/s}^2)$$

Suy ra: $\quad g_{HN} = G_{HCM}\Delta g \approx 9,793(\text{m/s}^2)$.

5.53. (KB6 – 76)



Để xây dựng đồ thị của quá trình này trên giản đồ phụ thuộc của nhiệt độ tuyệt đối vào thể tích, trước hết ta tìm sự phụ thuộc giữa T và V cho các quá trình 1 → 2 và 3 → 4. Trên giản đồ PV, đồ thị của hai quá trình này là đường thẳng đi qua gốc tọa độ, vậy có thể viết:

Quá trình $1 \to 2$: $p = \alpha V, \alpha = const$

Quá trình $3 \to 4$: $p = \beta V, \beta = const (\beta < \alpha)$

Kết hợp với phương trình trạng thái khí lý tưởng $pv = RT$, ta nhận được.

Trong quá trình $1 \to 2$: $T = T = \frac{PV}{R} = \alpha \frac{V.V}{R}$

$$T = \frac{\alpha}{R} V^2$$

Trong quá trình $3 \to 4$: $T = \frac{\beta}{R} V^2$

(Phương trình trạng thái khí lý tưởng $PV = RT$ (= 1 mol)

Như vậy trên giản đồ TV, hai quá trình này được biểu diễn bằng hai đường parabol (Hz), đồng thời parabol cho quá trình $1 \to 2$ dốc hơn vì $\alpha > \beta$. Hai trạng thái 2 và 4 có thể tính bằng nhau $V_2 = V_4 = V$ nên trên giản đồ TV chúng nằm trên một đường thẳng đứng $V = const$ cắt hai đường parabol. Hai dường đẳng nhiệt $2 \to 3$ và $4 \to 1$ trên giản đồ TV là hai đoạn thẳng nằm ngang bắt đầu tại hai điểm 2 và 4 và giao với parabol lân cận tại hai điểm 3 và 1.

Ta tìm thể tích V_3. Vì hai đường 2 – 3 và 4 – 1 là đẳng nhiệt

$$T_2 = T_3 \quad \text{và} \quad T_1 = T_4$$

Ta viết lại đẳng thức này bằng cách sử dụng biểu thức của nhiệt độ.

Qua hai thể tích tương ứng

$$\frac{\alpha}{R} V^2 = \frac{\beta}{VR} V_3^2 \qquad \text{và} \qquad \frac{\alpha}{R} V_1^2 = \frac{\beta}{VR} V^2$$

Chịu đẳng thức đầu cho đẳng thức thứ hai, ta tìm được $V_3 = \frac{V^2}{V_1}$.

5.54. (KB2 – 75). Vì thành hình trụ làm bằng vật liệu cách nhiệt nên dù với quá trình nào diễn ra với khí trong hình trụ khi trộn lẫn khí. Định luật bảo toàn năng lượng luôn luôn đúng.

$$cm_1(T - T_1) = cm_2(T_2 - T).$$

Trong đó C – nhiệt dung riêng của khí, m_1 và m_2 – khối lượng khí tương ứng trong hai phần của hình trụ, T – Nhiệt độ được thiết lập trong hình trụ khi cân bằng. Từ công thức này (phương trình cân bằng nhiệt, sau một vài phép biến đổi phức tạp ta có:

$$T = \frac{\left(\frac{m_1}{m_2}\right) T_1 + T_2}{1 + \frac{m_1}{m_2}}$$

Tỷ số $\frac{m_1}{m_2}$ dễ dàng tìm được nếu sử dụng phương trình trạng thái khí.

Đối với khí trong hai phần hình trụ trước khi bỏ bản cách nhiệt, ta có thể viết:

$$P_1V_1 = \frac{m_1}{\mu}RT_1 \quad \text{và} \quad P_2V_2 = \frac{m_2}{\mu}RT_2.$$

Nếu chia đẳng thức đầu cho đẳng thứ hai ta có:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{P_1V_1T_2}{P_2V_2T_1}$$

Cuối cùng ta nhận được: $T = \frac{T_1T_2(P_1V_1 + P_2V_2}{P_1V_1T_2 + P_2V_2T_1}$.

5.55.. (KB10 – 77). Ta xét phân tử có trong thành phần khí quyển của hành tinh "phân tử này được giữ gần bề mặt hành tinh nếu động năng của nó không vượt quá thế năng của phân tử trong trường hấp dẫn của hành tinh.

$$\frac{mv^2}{2} \le \gamma\frac{mM}{r}$$

Trong đó m – khối lượng phân tử, v^2(có gạch TB trên đầu) – bình phương trung bình vận tốc của nó, γ – hằng số hấp dẫn, M – khối lượng hành tinh, r – bán kính hành tinh. Có thể đánh giá được bán kính hành tinh nếu sử dụng sự bằng nhau giữa động năng và thế năng.

$$\frac{mv^2}{2} \le \gamma\frac{mM}{r_{min}} \quad \gamma = 6,67.10^{-11} \qquad (1)$$

Bình phương trung bình vận tốc của phân tử khí liên quan tới nhiệt độ T của khí bởi hệ thức:

$$v^2 \text{ (có dấu trung bình)} = \frac{3KT}{m} = \frac{3RT}{\mu}$$

Trong đó K – hằng số bolgman, R – hằng số khí, μ – khối lượng phân tử khí. Có thể biểu diễn khối lượng hành tinh quá giá trị trung bình của mật độ vật chất của hành tinh δ và bán kính cực tiểu của nó r_{min}:

$$M = \frac{4}{3}\Pi r^3 \min\delta$$

Khi đó có thể viết lại hệ thức (1) dưới dạng:

$$\frac{3RT}{2\mu} \approx \frac{4}{3}\gamma\Pi r_{min}^2\delta$$

Suy ra : $$r_{min} = \sqrt{\frac{9RT}{8\pi\gamma\delta\mu}} \qquad (2)$$

Từ công thức (2) suy ra rằng, r_{min} phụ thuộc vào khối lượng phân tử μ: r_{min} càng nhỏ nếu μ càng lớn. Theo điều kiện bài toán khí quyển hành tinh về cơ bản bao gồm oxy và nitơ, vì vậy khối lượng phân tử của chúng bằng $\mu_{oxy} = 32.10^{-3}$ kg/mol, $\mu_{nitơ} = 28.10^{-3}$ kg/mol. Vì vậy để tìm bán kính cực tiểu r_{min} ta xem rằng khí quyển chỉ có nitơ. Như vậy:

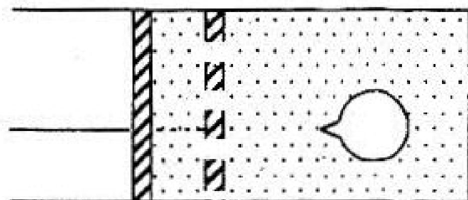
$$r_{min} = \sqrt{\frac{9R.T}{8\gamma \prod \delta\mu_2}} = 3.10^5 \text{ m} = 300\text{km}.$$

5.56. (KB6 – 80). Để hiểu nhiệt độ thay đổi thế nào khi khí chiếm đầy bình ta cần phải xét sự biến đổi năng lượng xẩy ra. Khi mở van, một phần khí nào đó sẽ tràn vào bình có động năng của chuyển động vĩ mô có hướng khí tràn vào bình có dạng chùm. Khi gặp thành bình và với khí có trước trong bình, chùm sẽ thay đổi hướng, yếu dần và cuối cùng bị tản ra. Khi đó động năng của chuyển động có điều chỉnh của khí trong bình biến thành nội năng, trừ là năng lượng của chuyển động nhiệt hỗn loạn của các phân tử khí.

Tất cả quá trình này diễn ra nhanh đến mức độ mà có thể bỏ qua sự trao đổi nhiệt của khí vào bình với khí bao quanh và với thành bình. Vì vậy, với quá trình đã xét, định luật thứ nhất nhiệt động học có dạng: Công A của áp lực của khí bao quanh bình đặt vào khí có trong bình bằng sự biến thiên nội năng của khí vào trong bình.

$$A = \Delta U \qquad (1)$$

Khi lấp đầy bình nhỏ đã được hút khí, áp suất và nhiệt độ trong khí quyển của khí bao quanh không thay đổi. Vì vậy để tìm công A, ta tưởng tượng rằng bình đã hút khí nằm trong hình trụ lớn có pittông di động.



Hình trụ chứa đầy khí có nhiệt độ T_0, áp suất P_0. Sự dịch chuyển của pittông về bên phải dưới áp suất không đổi P_0 tương ứng với quá trình lấy khí đầy bình.

Lực tác dụng lên pittong thực hiện một công P_0V_0, V_0 – thể tích quét bởi pittong khí nó dịch chuyển. Công này bằng công của ngoại lực đặt lên khí tràn thay đổi. Ta chú ý rằng thể tích V_0 không trùng với thể tích nội tại của bình chứa vì nhiệt độ T của khí trung bình khác nhiệt độ T_0. Nhờ phương trình trạng thái của khí lý tưởng, ta có thể biểu diễn công A qua nhiệt độ T_0 và lượng khí đi vào bình.

$$A = P_0 V_0 \Rightarrow \quad RT_0 \qquad (2)$$

Sự biến đổi nội năng ΔU của khí đi vào bình bằng

$$\Delta U = v\frac{3}{2}R(T - T_0) \qquad (3)$$

Thay (2), (3) vào phương trình (1) ta có: $T = \frac{5}{3}T_0$

Như vậy nhiệt độ của khí chiếm đầy bình đã hút khí lớn hơn nhiệt độ của khí bao quanh bình. Ta chú ý rằng kết quả nhận được không phụ thuộc vào thể tích của bình cũng như vào áp suất P_0. Nhiệt độ của khí trong bình cũng không phụ thuộc vào sự lắp khí vào bình có sấy ra đến khi mà áp suất trong bình có bằng áp suất khí trong môi trường bao quanh hay không hoặc là van sẽ đóng trước, cũng như van đóng muộn hơn.

5.57. (KB5 – 80). Có hai lực tác dụng lên vật: Trọng lực Mg (có véc tơ) (M – khối lượng của vật) và lực F (có véc tơ) là hợp của tất cả các áp lực của chất lỏng tác dụng lên các phần nhỏ của bề mặt. Theo Định luật II Newton:

F(có véc tơ) = Mg (có véc tơ) = Ma (có véc tơ)

Để tìm F (có véc tơ) ta sử dụng phương cách sau đây. Lấy trong chất lỏng một thể tích V_1 = thể tích của vật chìm trong nước và có dạng của phần vật chất trong nước. Tác dụng lên thể tích này từ phần nước còn lại cũng là lực F (có véc tơ). Vì thể tích này cùng với bình chuyển động với gia tốc a(có véc tơ) nên:

F(có véc tơ) + mg(có véc tơ) = ma(có véc tơ)

Trong đó m – khối lượng chất lỏng trong thể tích V_1. Vì vậy:

M(a – g) (có véc tơ) =m(a – g) (có véc tơ) $\Rightarrow$ M = m.

Nhưng $M = \delta_T V, m = fV_1$, V – thể tích của vật, δ_T – mật độ vật, δ – mật độ chất lỏng.Vì vậy:

$$\delta_T V = fV_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{V_1}{V} = \frac{\delta_T}{\delta}$$

Hệ thức này không phụ thuộc vào gia tốc a(có véc tơ) của bình, và vì vậy khi bình chuyển động với gia tốc a(có véc tơ) bất kỳ thể tích của phần vật chìm trong nước luôn bằng $\frac{2}{3}$ thể tích của vật.

5.58. (K10 – 75).

Phương trình phản ứng phân hủy hyđrit Uran



$$2\,UH_3 = 2U + 3H_2$$

Tức là từ – 482 g hyđrit (2 phân tử gam) ta nhận được 476g (2 mol) Uran và 6g (3 mol) hyđro. Vì vậy từ 1g hydrit Uran ta nhận được $m = \frac{6}{482}$ g hyđro.

Nếu xem hyđro là khí lý tưởng, ta tìm được áp suất của nó trong các điều kiện đã cho ($T = 673^0K$, $V = 10^{-3}m^3$). Từ phương trình trạng thái khí lý tưởng ta có :

$$p = \frac{m}{\mu}.\frac{RT}{V} = 35.10^3 N/m^2 \qquad (U = 238, H = 1).$$

5.59. (KB2 – 77).

Động năng trung bình của chuyển động nhiệt của nguyên tử Ne bằng $\overline{E_K} = \frac{3}{2}KT$. Mặt khác $\overline{E_K} = \frac{mv^2}{2}$, trong đó m – khối lượng nguyên tử, v^2 (có véc tơ) bình phương trung bình của vận tốc chuyển động nhiệt của nó. Từ đẳng thức $\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}KT$ ta tìm được vận tốc toàn phương trung bình của nguyên tử Ne: $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3KT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$

Trong đó μ – Khối lượng nguyên tử Ne.

Sự biến đổi tần số bức xạ mà ta cảm nhận được phụ thuộc vào vận tốc v_x chuyển động của nguồn về phía người quan sát. Để đánh giá độ của hiệu ứng chúng ta có thể giả thiết rằng thành phần vận tốc v_x của các nguyên tử Ne khác nhau nằm trong giới hạn từ $-\sqrt{\overline{v_X^2}}$ đến $+\sqrt{\overline{v_X^2}}$, $\sqrt{\overline{v_X^2}}$ – giá trị toàn phương trung bình của vận tốc v_x. Nếu sử dụng mô hình đơn giản hóa này ta nhận được biểu thức độ rộng của các vạch trong phổ bức xạ của nguồn:

$$\Delta f = \frac{2\sqrt{\overline{v_X^2}}}{c} f_0$$

Bởi vì $\overline{v_X^2} = \frac{1}{3}\overline{v^3} = \sqrt{\frac{RT}{\mu}}$, ta có thể viết $\Delta f = \frac{2f_0}{c}\sqrt{\frac{RT}{\mu}}$

Từ đó suy ra rằng: $T = \frac{Mc^2}{4R}\left(\frac{Hf}{nf_0}\right)^2 = 700^0K$.

5.60. (K6).

Nhiệt kế y học được gọi là nhiệt kế cực đại. Các số chỉ của nó tương ứng với nhiệt độ cực đại. Sau thời gian đo. Điều này xảy ra nhờ phần thắt lại. Khi đốt nóng thủy ngân trong bầu, phần thủy ngân bị nở ra. Khi đó xuất hiện lực đàn hồi vượt quá sức căng bề mặt tác dụng lên cột thủy ngân tại chỗ thắt chặt và thủy ngân chảy vào ống mao dẫn. Khi nhiệt kế nguội đi, thủy ngân bắt đầu co lại, lực đàn hồi xuất hiện "bởi trong" cột thủy ngân tại chỗ thắt lại và trong ống mao dẫn còn lại một cột thủy ngân tương ứng với nhiệt độ đo được cực đại. Giữa cột thủy ngân trong ống mao dẫn và thủy ngân trong bầu có hơi thủy ngân.

Ta truyền gia tốc cho nhiệt kế hướng về bên trái. Lúc đầu do quán tính thủy ngân sẽ nằm yên và đi vào phần thắt lại và tạo thành màng lồi ra.

Áp suất trong thủy ngân dưới màng sẽ lớn hơn áp suất hơi thủy ngân bão hòa trong phần thắt một lượng $\frac{26}{r}$, r – bán kính màng. Đồng thời áp suất ở đầu phải của cột thủy ngân trong ống mao dẫn vượt quá áp suất hơi một lượng $\frac{20}{R}$, R – bán kính của màng phải, có thể xem nó bằng bán kính của ống mao dẫn.

Ta xét phần có gạch trong hình vẽ của cột thủy ngân có diện tích tiết diện $S = \Pi r^2$. Áp suất tại đầu trái của nó bằng $p + \frac{26}{r}$ (p – áp suất hơi thủy ngân). Vì vậy lực tác dụng vào cột hướng về bên trái:

$\left|\overrightarrow{F_1}\right| = (p + \frac{26}{r})s$, lực tác dụng vào đầu phải của cột

$\left|\overrightarrow{F_2}\right| = (p + \frac{26}{R})s$. Hiệu của hai lực này truyền gia tốc cho cột (khối lượng m).

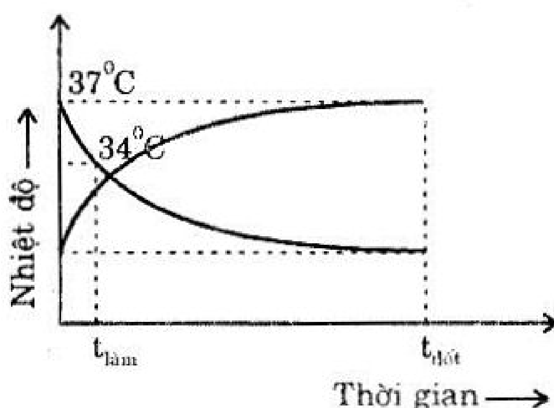
$$\left|\overrightarrow{a_0}\right| = \frac{265}{m}(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{R})$$

Vì rằng $r_o << R$ nên $\frac{1}{r_0} >> \frac{1}{R}$, vậy có thể xem rằng

$$\left|\overrightarrow{a_0}\right| \approx \frac{26s}{r_0 m}$$

Giá trị này là gia tốc cực tiểu cần phải truyền cho nhiệt kế để "giật" nó. Ta đánh giá độ lớn (có trị tuyệt đối, véc tơ) a_0. Khối lượng thủy ngân trên chỗ thắt lại bằng 8v, trong đó $8 = 13{,}6.10^3$ kg/m^3 – mật độ thủy ngân, V – thể tích của cột thủy ngân trên phần thắt lại. Ta giả thiết độ dài của cột 4 cm, đường kính $\sim 6.10^{-5}$. Sử dụng các số liệu này và giá trị $\delta = 0{,}5$ N/m, ta tìm được (có trị tuyệt đối, véc tơ) $\left|\overrightarrow{a_0}\right| = 80$m/s^2.

5.61. Khi nhiệt độ, nhiệt kế cần phải được đốt nóng từ nhiệt độ phòng đến nhiệt độ của cơ thể, tức là tăng lên khoảng 15 – 17^{0}C. Có thể "giật" nhiệt kế khi nhiệt độ giảm xuống khoảng 3 – 4^{0}C. Vì rằng thang nhiệt kế bắt đầu từ 34^{0}C, nên khi hạ nhiệt độ xuống khoảng vài độ trong bầu sẽ tạo thành khoảng trống đủ để đặt thủy ngân nằm trên phần thắt lại vào bầu. Còn cần phải tính rằng khi

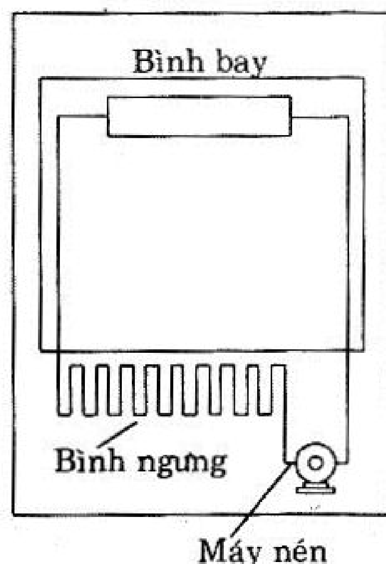


nung nóng và làm nguội vật, vận tốc thay đổi, nhiệt độ của vật tỷ lệ với hiệu nhiệt độ của vật và môi trường và vì vậy sự phụ thuộc nhiệt độ của nhiệt kế vào thời gian có dạng được trình bày trên.

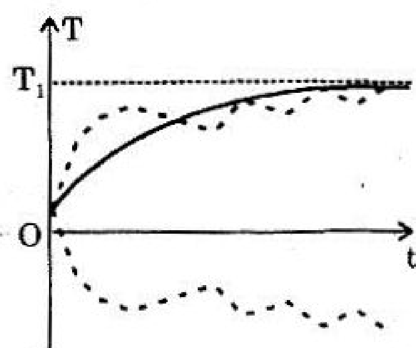
(Từ "giặt = dũ" tức là sau khi do nhiệt độ phải làm cho cột thủy ngân trong ống mao dẫn chờ về bầu).

Thời gian làm nguội nhiệt kế đến nhiệt độ mà cơ thể "giặt" được nó nhỏ hơn nhiều thời gian đo nhiệt độ.

5.62. (KB3 –75). Máy lạnh hoạt động theo nguyên tắc ngược với nguyên tắc làm việc của máy nhiệt: công xác định được thực hiện trên vật làm việc – khí – phần tử tải, nhiệt được truyền từ vật lạnh cho vật nóng. Đồng thời không chỉ nhiệt thoát ra nguồn lạnh (vật) mà cả nhiệt tương đương với công truyền cho vật nóng hơn. Trong tủ lạnh gia đình, khí ngưng tụ – phân tử tải khí bay khi thu nhiệt ở thành của bình bay hơi. Sau đó khí này lại ngưng tụ trong bình ngưng hơi bằng cách truyền nhiệt cho không khí bao quanh. Nếu hai cửa của tủ lạnh mở ra thì nhiệt toả ra bởi bình bay hơi từ không khí bao quanh và truyền bởi bình ngưng tụ cho khí trong phòng không khí nhận được nhiệt tương đương với công thực hiện cũng như nhiệt toả ra trong các dây nối và trong cuộn dây của động cơ điện của máy nén khí. Vì vậy khi mở cửa tủ lạnh nhiệt độ trong phòng sẽ liên tục tăng lên cho đến khi mà lượng nhiệt vào phòng không bằng nhiệt lượng đi ra khỏi phòng ra đường. Khi đó rơle không làm việc. Đồ thị thay đổi nhiệt độ trong phòng là đường liền nét trên hình.



Bây giờ ta xét tủ lạnh đóng. Đầu tiên nhiệt độ trong tủ lạnh (trong buồng lạnh) sẽ giảm còn trong phòng tăng lên, đồng thời nhanh lên rất nhiều trong trường hợp tủ mở, vì rằng bây giờ nhiệt toả ra không phải từ không khí trong phòng mà từ không khí nằm trong thể tích giới hạn của tủ, và truyền cho không khí trong phòng. Khi đó nhiệt độ trong phòng có thể cao hơn hoặc thấp hơn T_1. Điều đó phụ thuộc vào tốc độ trao đổi nhiệt giữa phòng và đường và vào nhiệt độ trong tủ lạnh mà rơle nhiệt làm việc ở đó (bất kỳ từ thời gian nào làm việc của tủ lạnh đến khi nó ngừng). Khi nhiệt độ trong tủ lạnh đạt được nhiệt độ định mức, rơle nhiệt ngắt mạng điện khỏi tủ lạnh, và nhiệt độ trong tủ lạnh sẽ tăng dần do sự trao đổi nhiệt qua thành của tủ lạnh. Sau đó tủ lạnh lại đóng mạch, nhiệt độ trong buồng sẽ hạ xuống và .. Đồ thị phụ thuộc của nhiệt độ trong máy lạnh vào thời gian là đường gạch – gạch trên hình. Tương ứng với sự dao động nhiệt trong buồng



lạnh, nhiệt độ trong phòng cũng thay đổi . Nhưng vì rằng tại thời điểm ngắn tủ lạnh khỏi mạng điện nhiệt độ của buồng ngưng cao hơn nhiệt độ trong phòng nên nhiệt độ trong phòng còn tăng lên một lúc – mặc dù tủ lạnh không làm việc. Sau đó nhiệt độ trong phòng giảm đi rồi máy lạnh lại bị ngắt và v.v... Nếu rơle nhiệt tốt là nó đóng máy lạnh ở sự tăng nhiệt độ không lớn trong tủ thì máy lạnh làm việc hầu như liên tục.

Vì rằng nhiệt lượng không lớn lắm đi qua thành tủ truyền từ tủ lạnh vào phòng nên tủ lạnh thực hiện một công không lớn. Nhiệt độ trong phòng bắt đầu giảm xuống, tới giá trị không đổi nào đó (thấp hơn T_1). Nếu rơle xấu thì tủ lạnh sẽ bị ngắt một thời gian lớn, nếu sự trao đổi nhiệt của nó với phòng xấu và trong một thời gian không lớn lắm nếu sự trao đổi này đã dao động nhiệt và giá trị trung bình mà nhiệt độ trong phòng trên cận tới được xác định bởi điều này. Một trong những đường con phụ thuộc nhiệt trong phòng vào thời gian được chỉ ra bởi đường gạch – chấm trên hình. Khi máy lạnh chứa đầy sản phẩm, thì thời gian mà máy lạnh làm việc cũng như thời gian không làm việc tăng lên. Và như vậy chu kỳ dao động nhiệt trong phòng thay đổi.

5.643. (KB3 – 75). Áp suất lên cầu được xác định bởi mức nước trong kênh. Nếu xà lan chuyển động qua kênh thì mức nước nâng lên càng cao, nếu xà lan càng nặng. Tuy nhiên thực tế mức nước trên toàn kênh vẫn như trước vì rằng thể tích nước mà thuyền đẩy ra nhỏ hơn rất nhiều so với thể tích của toàn bộ nước trong kênh.

5.644. (KB1 – 75).

Áp suất khí trong bình bằng $P_1 = n_1kT_1 = 4.n_1kT$, trong đó n_1 – độ tập trung phân tử trong bình (số phân tử trong một đơn vị thể tích) và k – hằng số Bolzman. Ngoài bình áp suất bằng $P = n_2KT$ (n_2 – độ tập trung phân tử trong không gian bao quanh). Vì vậy : $P_1 = 4p\frac{n_1}{n_2}$.

Như vậy, để tìm áp suất trong bình cần phải tìm tỷ số độ tập trung phân tử khí trong bình và trong không gian bao quanh. Để tìm tỷ số này ta sử dụng điều là khí trong bình nằm trong trạng thái cân bằng.

Khi cân bằng số phân tử khí bay khỏi bình bằng số phân tử khí bay vào bình trong cùng một khoảng thời gian. Để đơn giản ta giả thiết rằng, vận tốc của tất cả các phân tử khí khi nhiệt độ ổn định là bằng nhau và bằng vận tốc toàn phương trung bình tương ứng với nhiệt độ đó. Ngoài ra ta xem rằng các phân tử chuyển động dọc theo ba hướng vuông góc với nhau, một trong chúng vuông góc với mặt phẳng tiết diện của tổ đồng thời tất cả các hướng là bình đẳng (đẳng hướng). Khi đó $\frac{1}{6}$ các phân tử có trong bình chuyển động có hướng tới lỗ. Sau thời gian Δt, các phần tử nằm cách lỗ một khoảng $v_1\Delta t$, v_1 – vận tốc phân tử trong bình

sẽ bay khỏi bình.

Vì rằng độ tập trung phân tử trong bình bằng n_{1} nên sau thời gian Δt từ bình sẽ bay ra $\frac{1}{6}n_1v_1\Delta t\Delta s$ phân tử (Δs – diện tích của lỗ). Tương tự sẽ có $\frac{1}{6}n_2v_2\Delta t\Delta s$ phân tử bay vào bình, v_2 – vận tốc phân tử khí trong không gian bao quanh. Khi cân bằng $n_1v_1 = n_2v_2$. Từ đó ta tìm được tỷ số độ tập trung phân tử. $\frac{n_1}{n_2} = \frac{v_1}{v_2}$. Nhưng ta biết rằng vận tốc toàn phương trung bình của chuyển động phân tử liên hệ với nhiệt độ khí theo công thức $\frac{m\overline{v^2}}{2} = \frac{3kT}{2}$ (m – khối lượng phân tử). Vì vậy:

$$v_1 = \sqrt{\frac{12kT}{m}}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \qquad \text{và} \qquad \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{2}$$

Nếu sử dụng hệ thức này ta tìm được áp suất khí trong bình: $P_1 = 2P$.

5.65. (KB4 – 74). Để đun sôi chất lỏng đồng nhất cần phải là áp suất hơi bão hòa trong bong bóng tạo thành trên toàn bộ thể tích của chất lỏng bằng áp suất khí quyển bên ngoài.

Khi đun sôi "biên", trong các bong bóng nằm trên ranh giới của nước và CCl_4 hơi nước và hơi CCl_4, đồng thời tổng áp suất riêng phần bằng áp suất khí quyển:

$$P_{atm} = P_1 + P_2.$$

Trong đó P_2 = 192 mmHg – áp suất riêng phần của hơi nước bão hòa. P_2 – áp suất riêng phần của hơi CCl_4 bão hòa. Bởi vì P_{atm} = 760mmHg nên:

$$P_1 = P_{atm} - P_1 = 568\text{mmHg}.$$

Trong thời gian đun sôi, các bong bóng dâng lên, đi đến mặt chất lỏng và bị vỡ ra. Vì vậy tỷ số khối lượng của hai chất lỏng m_1 và m_2 bay hơi sau một khoảng thời gian nào đó bằng tỷ số mật độ hơi nước (δ_1) và hơi CCl_4 (δ_2) trong bong bóng.

Từ phương trình Mexdedecv – Klapeiron, mật độ hơi bão hòa:

$$\delta_H = \frac{P_H\mu}{R_T}; \qquad vp = \frac{m}{\mu}RT \qquad \rightarrow \qquad \frac{P\mu}{RT} = \frac{m}{v}$$

Trong đó P_H – áp suất hơi bão hòa, μ – khối lượng phân tử hơi, T và R – biên độ và hằng số khí. Vì vậy:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{P_1\mu_1}{P_2\mu_2} = \frac{192.18}{568.154} = \frac{1}{25}$$

H = 1; O = 16; C = 12; Cl = 35,5.

Từ đó suy ra rằng CCl_4 khi đun sôi "biên" bay hơi nhanh hơn nước 25 lần.

5.66. (KB 9 – 90). Phần đầu của đồ thị (H.1) gần như thẳng, tức là sự mất nhiệt nhỏ. Ta sẽ xem rằng hoàn toàn không phải như vậy. Điều đó cho chúng ta khả năng đánh giá công suất tiêu hao nhiệt ở các nhiệt độ khác nhau của nước so với công suất đốt nóng. Muốn thế ta cần phải so sánh độ dốc của các tiếp tuyến tại các điểm khác nhau của đồ thị.

Trong miền nhiệt độ 60^0C tg của góc lệnh của tiếp tuyến nhỏ hơn 8 lần tg của góc lệch của phần thẳng ban đầu. Điều đó có nghĩa là $\frac{7}{8}$ năng lượng tiêu thụ thoát ra ngoài. Tương tự ta có ở nhiệt độ gần tới 50^0C mất $\frac{3}{4}$ phần năng lượng ở nhiệt độ nhỏ hơn, độ chính xác nhận được hoàn toàn tồi hơn, vì vậy trả lời cho vấn đề thứ hai (về sự giảm đến 30^0C) chỉ có thể làm được gần đúng.

Ta có thể vẽ gần đúng đồ thị phụ thuộc nhiệt độ của nước khi nguội vào thời gian trên H.2. Từ đó nhận thấy rằng thời gian làm nguội từ 60^0 đến 50^0 khoảng 0,3 phút, còn đến 30^0C khoảng 2,5 – 3 phút.

Ghi chú: Kết quả nhận được phụ thuộc chủ yếu vào dạng đồ thị xuất phát.

5.67. (KB9 – 79). Hiệu suất của chu trình bằng tỷ số của công A thực hiện bởi khí và nhiệt lượng Q truyền cho khí trong một chu trình. Công bằng diện tích giới hạn bởi đồ thị của chu trình.

Với chu trình đầu: $A_1 = (2p_0 - p_0)(2v_0 - v_1) = p_0v_0$

Với chu trình thứ hai: $A_2 = (4p_0 - p_0)(2v_0 - v_1) = 3p_0v_0$

Ta tìm Q_1 và Q_2. Trong trường hợp đầu, nhiệt lượng truyền cho khí trên hai phần 1 – 2 và 2 – 3. Khi đó khí được đốt nóng, còn trên phần 2 – 3 thực hiện công $A' = 2p_0v_0$. Vì vậy $Q_1 = A' + \Delta U$, $\Delta U'$ – sự biến thiên năng của khí. Vì rằng nhiệt độ khí cực tiểu tại điểm 1 và cực đại tại điểm 3, còn nhiệt dung của một kmol khí lý tưởng đơn nguyên tử bằng $\frac{3}{2}R$,

$$\Delta U' = \frac{3}{2}RV(T_3 - T_1).$$

Trong đó V – số kmol khí, $T_1 = \frac{P_0V_0}{VR}$, $T_3 = 4\frac{P_0V_0}{VR}$.

Vì vậy: $\Delta U' = \frac{9}{2} P_0 V_0$ và $Q_1 = \frac{13}{2} P_0 V_0$.

Tương tự ta tìm được cho chu trình hai $A' = 4P_0V_0$ (trên phần 5 – 6),

$$\Delta U'' = \frac{3}{2} RV(T_6 - T_1) = \frac{21}{1} P_0 V_0 \quad \text{và} \quad Q_2 = \frac{29}{2} P_0 V_0$$

Sử dụng các số liệu nhận được ta có:

$$\eta_1 = \frac{2}{13}, \eta_2 = \frac{6}{29}, \frac{\eta_1}{\eta_2} = 0{,}74 .$$

5.68. (KB5 – 78). Bài dịch trong cuốn KB.5 –78 tương tự bài 5.30. Xem bài giải 5.30.

5.69. (KB8 – 78). Ta ký hiệu P_0 là áp suất khí quyển, P_1 áp suất tại điểm trên của giọt. Vì rằng hiệu áp suất ở trong và ở ngoài giọt bình cầu bán kính bằng R bằng $\frac{2\delta}{R}$ đối với điểm trên.

$$P_1 - P_0 = \frac{2\delta}{R_1} \qquad (*)$$

($\frac{2\delta}{R_1}$ áp suất lên bề mặt ngoài khối lỏng)

Tại điểm dưới của giọt tá suất bằng $P_1 + \delta gd$ (áp suất tĩnh trong nóng chảy). Vì vậy:

$$P_1 + \delta gd - P_0 = \frac{2\delta}{R_2} \qquad (**)$$

(δ – khối lượng riêng của nước)

Từ hai đẳng thức (*) và (**) ta được :

$$\delta gd = 2\delta\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) = 2\delta \frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2}$$

Vì rằng kính thước của giọt nước nhỏ (d = 2m) nên bán kính độ cong R_1 và R_2 khác nhau ít. Vì vậy mẫu số của biểu thức vừa nhận được có thể viết :

$$R_1 = R_2 = \frac{d}{2}.$$

Cuối cùng ta tìm được: $R_1 - R_2 = \frac{\delta g d^3}{80} \approx 0{,}14mm$

5.70. (KB8 – 81). Sau khi ở đáy xuất hiện lỗ thủng thì mức chất lỏng ở

trong và ngoài cốc ngang nhau. Khi đó cốc cần phải chuyển động lên trên, vì rằng lực đẩy tăng (áp suất từ dưới lên đáy bình tăng lên vì $P_2 > P_1$). Hiệu ứng phản tác dụng xuất hiện vì khi đó lực tác dụng từ dưới lên trên mặt đáy của thành cốc giảm đi (cốc thành mỏng tức là diện tích mặt đáy $\Delta S << S$). Trong trường hợp khi mà tăng lực đẩy không đáng kể (xảy ra khi H và d không lớn). Cốc nổi ở một khoảng cách nào đó x, lại nằm trong trạng thái cân bằng. Điều kiện cân bằng trong hai trường hợp trên (P_0 – áp suất ở biên của hai chất lỏng, L – độ cao tổng cộng của cốc):

$$mg + (P_0 - \delta_1 g)S =$$

$$= [P_0 + \delta_2 g(L - H - x)]\Delta s + [P_0 - \delta_1 g(H + x - d)(S - \Delta S) \quad (1)$$

$$mg + [P_0 - \delta_1 g(H + x)]S =$$

$$= [P_0 + \delta_2 g(L - H - x)]\Delta s + [P_0 - \delta_1 g(H + x - d)\Delta S),)](S - \Delta S) \quad (2)$$

Phá ngoặc và đặt thừa số chung ta có:

$$m = \delta_1 HS + \delta_2 HS + \delta_1 ds + \delta_2 L\Delta S - \delta_2 d\Delta S \quad (1')$$

$$m = \delta_1 ds + \delta_2 L\Delta S - \delta_2 H\Delta S - \delta_2 x\Delta S + \delta_1 H\Delta S + \delta_1 x\Delta S - \delta_1 d\Delta S \quad (2')$$

Cân bằng hai vế phải và sau một vài biến đổi ta có:

$$x = (H - d)\,\frac{S - \Delta S}{S}$$

Cốc sẽ chuyển động lên trên nếu có điều kiện $x < L - H$, hoặc là:

$$H - d < \frac{\Delta S}{S}(L - d)$$

Nếu điều này không thực hiện được, cốc sẽ nổi trên mặt.

5.71. (KB). Giả sử ta có bình A chứa nước nóng (nhiệt độ T_2), Bình B chứa nước nguội (nhiệt độ T_x), bình C có thành dẫn nhiệt, bình D cách nhiệt.

Ta tiến hành làm nóng nước nguội theo hai giai đoạn:

1. Rót phần nước nguội từ B vào C, đặt bình C có nước nguội vào bình A. Sau một khoảng thời gian nào đó, nhiệt độ nước trong bình A và C cân bằng:

$$T_A = T_C = T_1 \text{ đồng thời } T_2 > T_1, T_x$$

Ta rót nước nguội từ C vào bình D.

2. Rót nước nguội còn lại vào C, thả C vào A (nước nóng trong A có nhiệt độ T_1). Sau một khoảng thời gian nào đó nhiệt độ của nước trong A và C cân bằng $T'_A = T'_C$, đồng thời $T_1 > T_2 > T_x$

Rót nước từ C vào D, trong D đã có nước lạnh nhiệt độ T_1. Kết quả là trong có nước lạnh có nhiệt độ: $T_1 > T_3 > T_2$

Còn trong bình A nước nóng có nhiệt độ: $T_2 < T_3$.

Tức là nước lạnh có nhiệt độ ban đầu T_x trở thành nước có nhiệt độ T_3 lớn hơn của nước nóng có nhiệt độ ban đầu T_2 trở thành nước có nhiệt độ T_2.

5.72. (KB10 – 79). Số phân tử Z bay ra từ bầu trong thời gian t bằng:

$$Z = \frac{1}{2} nS\left|\overline{V_X}\right|t$$

Trong đó $\left|\overline{V_X}\right|$ – giá trị trung bình của modul hình chiếu vận tốc phân tử lên trục X vuông góc với thành có lỗ nhỏ, S – diện tích lỗ thủng, n – mật độ phân tử khí trong bình.

Đại lượng $\left|\overline{V_X}\right|$ tỷ lệ với vận tốc v của chuyển động nhiệt của phân tử.

Vì rằng $v = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$ (μ – khối lượng phân tử khí), $\left|\overline{V_X}\right| \sim \sqrt{T}$. Từ phương trình cơ bản của lý thuyết động học phân tử p = nkt suy ra :$n = \frac{P}{KT}$

Như vậy: $Z = \frac{P}{T}\sqrt{T} = \frac{P}{\sqrt{T}}$

Có nghĩa là khi tăng nhiệt độ lên 4 lần, áp suất lên 8 lần, vận tốc dòng khí tăng lên 4 lần.

5.73. (KB). Vì độ dẫn nhiệt của nước nhỏ nên có thể xem rằng quá trình hợp nhất hai bong bóng xảy ra không có sự trao đổi nhiệt và vì vậy sự biến thiên ΔU nội năng của hệ bằng công A của áp lực ngoài. Nếu áp suất ngoài bằng P_0, sự thay đổi thể tích ΔV thì $A = P_0\Delta V$.

Sự biến thiên nội năng của hệ bằng ΔV = δΔS + ΔU. Trong đó δΔS – biến thiên năng lượng bề mặt do sự thay đổi diện tích bề mặt của hai bong bóng một lượng ΔS (δ – sức căng bề mặt của nước); ΔU – biến thiên nội năng của khí.

Nội năng của khí do sự hợp nhất của hai bong bóng biến thiên một lượng:

$$\Delta U = \frac{5}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T$$

Trong đó m – khối lượng khí trong hai bong bóng, ΔT – biến thiên nhiệt độ của khí (không khí bao gồm chủ yếu phân tử hai nguyên tử C_2 và N_2, vì vậy có thể xem là khí hai nguyên tử. Nội năng của một mol khí này bằng

$\frac{5}{2}$ RT.) áp suất của khí trong hai bong bóng trong trường hợp này thực tế là không đổi. Thực vậy áp suất P khác với áp suất trong nước ở mức bong bóng một lượng $\frac{26}{r}$ ($r_1 = r_2 = r$) – trong bong bóng cần và một lượng $\frac{26}{\delta}$ – trong bong bóng mới bán kính δ (δ > r). Bởi vì sự hợp nhất xẩy ra ở bề mặt nước nên có thể xem rằng áp suất trong nước bằng áp suất khí quyển, tức là bằng $P_0 = 10^5 N/m^2$. Vì rằng $\frac{2\delta}{nr} = \frac{2.7,3.10^{-2}}{3.10^{-3}} \approx 49\ (N/m^2) << P_0$, có thể xem rằng áp suất trong các bong bóng không đổi và bằng P_0. Vì vậy theo phương trình trạng thái khí $P_0 \Delta V = \frac{m}{\mu} R\, \Delta T$, suy ra :

$$\Delta T = p.\ \Delta V \frac{m}{\mu}$$

Như vậy: $A = P_0 \Delta V = \delta \Delta S + \frac{5}{2} P_0\, \Delta V$

hoặc là $\quad \delta \Delta S = \frac{3}{2} P_0 \Delta V$

Nếu đặt $\quad \Delta V = \frac{4}{3} \Pi(\delta^3 - 2r^3)$ và $\Delta S = 4\Pi(\delta^2 - 2r^2)$, ta nhận được:

$$P_c \delta^3 + 26\delta^2 - 2P_0 r^3 - 4cr^2 = 0$$

Hoặc là tính tới số liệu đã cho.

$$10^5 \delta^3 + 14{,}6.10{,}6.10^{-2} \delta^2 = 5{,}4.10^3$$

Bởi vì $\delta > 3.10^{-3} m$ nên số hạng thứ hai trong vế trái nhỏ hơn số hạng thứ nhất và có thể bỏ qua nó. Vì vậy:

$$\delta \approx \sqrt[3]{5{,}4.10^{-8}} \approx 3{,}8.10^{-3}(m) \approx 3{,}3(mm).$$

5.74. (KB4 – 80). Chất lỏng sẽ tạo thành màng giữa các dây này. Bán kính của màng không thể lớn hơn một nửa khoảng cách giữa các dây, tức là r_{max} = 1mm. Vì vậy áp suất cực đại trong chất lỏng trên màng không vượt quá áp suất khí quyển một lượng $\Delta P = \frac{2\delta}{r}$ (δ – sức căng bề mặt của nước). Mặt khác ΔP bằng áp suất thủy tinh của cột nước độ cao h vượt qua dây $\frac{2\delta}{r} = \delta gh$

Từ đó $h = \frac{2\delta}{\delta gr}$. Khối lượng chất lỏng trong dây bằng tích của thể tích V

với mật độ δ tức là:

$$m = V.\delta = \frac{\Pi D^2}{4} h\delta = \frac{\Pi P^2 \delta}{2gr} \approx 0{,}058\text{kg}.$$

5.75. (KB6 – 75). Vì dính ướt nên bề mặt tự do của chất lỏng trong ống là một phần của mặt cầu. Bán kính hình cầu $R = \frac{r}{\cos\alpha}$, r – bán kính ống mao dẫn ứng với độ cao đó (H 1.2), áp suất chất lỏng ở mặt cầu nhỏ hơn áp suất khí quyển một lượng $P_d = \frac{2\delta}{R} = \frac{2\delta\cos\alpha}{r}$ và bằng $P = P_0 - P_{d=P}0 - \frac{2\delta\cos\alpha}{r}$.

Áp suất ở mức bề mặt chất lỏng trong bình rộng (trong ống mao dẫn) bằng P + dgh và rõ ràng bằng áp suất khí quyển P_0. Vậy:

$$P_0 - \frac{2\delta\cos\alpha}{r} dgh = P$$

$$\Rightarrow \quad dgh = \frac{2\delta\cos\alpha}{r} \qquad (1)$$

ký hiệu r_0 là bán kính ống mao dẫn ở mức bề mặt chất lỏng trong bình rộng dần. Khi đó $r = r_0 + R\,\text{tg}\alpha$ khi ống rộng dần và $r = r_0 + kh\,\text{tg}\alpha$ $(k = \pm 1)$ ta viết lại (1):

$$dgh = \frac{2\delta\cos\alpha}{r_0 + kh\text{tg}\alpha} \qquad (2)$$

Khi α = 0, phương trình này có nghiệm $h = \frac{2\delta}{dgr_0}$. Nếu $\alpha \neq 0$ thì từ (2) ta nhận được phương trình bậc hai:

$$kdg\text{tg}\alpha h^2 + dgr_0 h - 2\delta\cos\alpha = 0 \qquad (3)$$

Có nghiệm
$$h_{1.2} = \frac{-dgr_0 \pm \sqrt{(dgr_0)^2 + 8kdg\delta\sin\alpha}}{2kdg\text{tg}\alpha} \qquad (4)$$

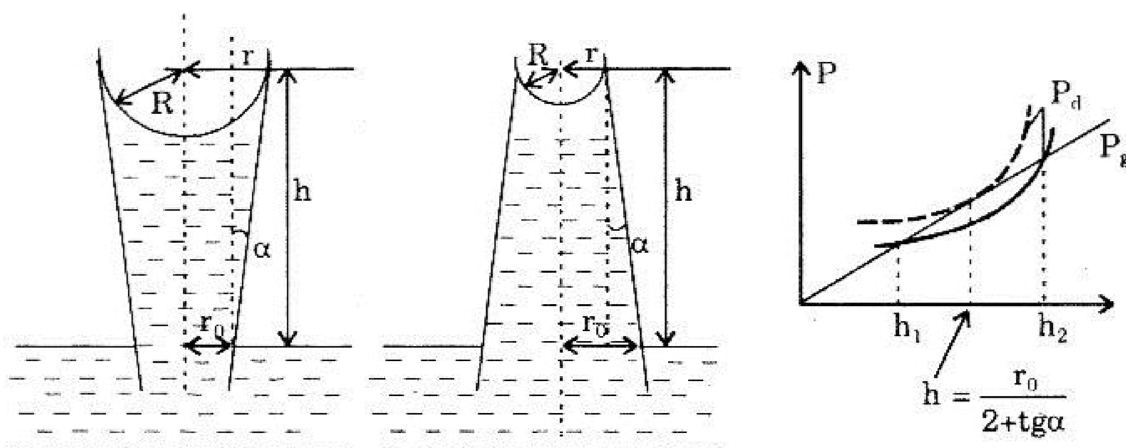
Trong trường hợp ống rộng dần (k = 1) ta có nghiệm dương của phương trình (3)

$$h = \frac{-r_0 + \sqrt{r_0 + \frac{8\delta\sin\alpha}{\varsigma g}}}{2\text{tg}\alpha}$$

Chất lỏng dâng lên độ cao này trong ống rộng dần.

Khi ống mao dẫn hẹp dần (k = –1), nếu $dgr_0^2 > 8\delta\sin\alpha$ thì cả hai nghiệm có thể dương và cần phải xét hai nghiệm một cách chi tiết hơn. Muốn thế ta xét phương trình (2). Vế trái của phương trình là áp suất thủy

tinh của cột chất lỏng độ cao h, ký hiệu là P_g. Vế phải là áp suất bể chính P_d xuất hiện do sức căng bề mặt.



Vẽ đồ thị P_g và P_d theo h (H.3), giao điểm của hai đường cong tương ứng với hai giá trị h_1, h_2. Giả thiết $h = h_1$ và vì một lý do nào đó mức chất lỏng tăng lên một ít. Khi đó P_d tăng chậm hơn P_g. Vậy bề mặt chất lỏng hạ xuống trở về mức có $h = h_1$. Khi giảm h, P_d giảm chậm hơn P_g. Vì vậy mức chất lỏng tăng lên. Vậy vị trí cân bằng $h = h_1$ là bền.

Tương tự, khi xét vị trí cân bằng $h = h_2$ có thể chỉ ra rằng vị trí đó không bền. Khi giảm mức chất lỏng, nó sẽ tiếp tục giảm đến giá trị h_1, còn khi tăng thì mức nước dâng lên trên biên của ống mao dẫn.

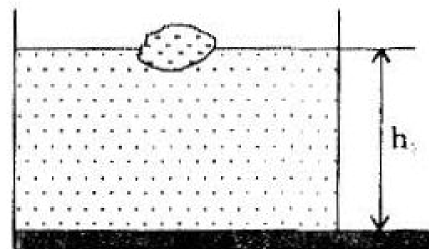
Khi $dgr_0^2 = 8\delta \sin\varepsilon$, phương trình khi có một nghiệm, hai đường cong P_d và P_g gặp nhau tại điểm $h = \frac{r_0}{2tg\alpha}$ trong trường hợp này vị trí cân bằng của chất lỏng, nước sẽ dâng lên đến biên của ống. Khi $dgr_0^2 < 8\delta \sin\alpha$ nói chung không có vị trí cân bằng và chất lỏng dâng lên đỉnh của ống mao dẫn.

5.76. (KB11 – 73). Khi phân tử Nitơ va chạm với bề mặt máy bay, bề mặt không thể nhận được năng lượng lớn hơn $\frac{5}{2}kt + \frac{mv^2}{2}$ vận tốc của máy bay (vận tốc của nitơ là $\vec{v}$ trong hệ tọa độ gắn với máy bay; m – khối lượng phân tử Nitơ, T_1 – nhiệt độ môi trường bao quanh. Sau khi va chạm, phân tử nitơ có năng lượng $\frac{5}{2}KT_2$ tương ứng với nhiệt độ T_2 của bề mặt máy bay nên:

$$\frac{5}{2}KT_2 < \frac{5}{2}kt_1 + \frac{mv^2}{2}$$

Suy ra: $T_{2\,max} = T_1 - \frac{mv^2}{5k} \approx 373^0 K$.

5.77. Gọi độ cao cột nước hay độ cao mức dầu là h_2, độ cao mức dầu trước khi băng tan là h_1 (hình vẽ).

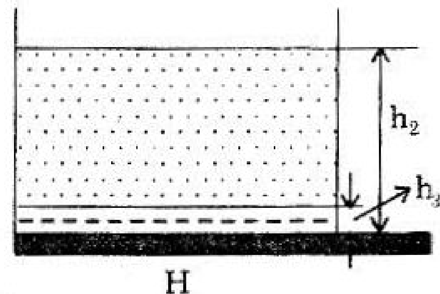


Vì lúc đầu băng không chạm đáy nên áp suất lên đáy bằng $P_1 = \varsigma_M g h_1$.

Trường hợp băng tan nó bằng:

$$P_2 = \varsigma_m g (h_2 - h_1) + \varsigma_B g h_3$$

(ς_m – mật độ dầu, ς_B – mật độ nước).



Vì $P_1 = P_2$ nên :

$$\varsigma_m h_2 = \varsigma_m (h_2 - h_1) + \varsigma_B g h_3$$

và $$h_2 = h_1 - \left(\frac{\varsigma_B}{\varsigma_m} - 1\right) h_3$$

Vì $\dfrac{\varsigma_B}{\varsigma_m} > 1$ nên $h_2 < h_1$. Tức là mức dần hạ xuống khi băng tan.

5.78. (KB4 – 80). Khi trong phòng có nhiệt độ xác định, năng lượng nhiệt do các lò phát ra bằng sự mất nhiệt do truyền nhiệt.

Vậy công suất nhiệt của lò sưởi là: $P = k(t_1 - t_0)$ (1)

Khi có thêm lò điện thì: $P + P_1 = k(t_2 - t_0)$ (2)

Từ (1) và (2) ta tìm được công suất nhiệt của lò sưởi :

$$P = P1\,\frac{t_1 - t_0}{t_2 - t_1} = 6 \text{ kW}.$$

5.79. (KB10 – 73). Ta giả thiết rằng khi tụ phóng điện, toàn bộ năng lượng của nó chỉ để đốt cháy Heli, tức là làm tăng nội năng của nó:

$$\frac{CU^2}{2} = \Delta W$$

Hêli là khí đơn nguyên tử. Vì vậy nội năng của nó bằng $\frac{3}{2}RTn$, độ biến thiên $\Delta W = \frac{3}{2}Rn(T - T_0)$, trong đó R – hằng số khí, n – số mol khí T_0 – nhiệt độ ban đầu.

Theo phương trình trạng thái khí $P_0V_0 = nRT_0$, $n = \dfrac{P_0V_0}{T_0R}$. trong đó P_0, V_0, T_0 – các tham số ban đầu của Heli (T_0 có thể xem là nhiệt độ phòng 300^0K).

Như vậy: $\frac{CU^2}{2} = \frac{3}{2} R \frac{P_0V_0}{RT_0} (T - T_0)$.

Suy ra: $\frac{T}{T_0} = \frac{CU^2}{3P_0V_0} + 1 \approx 1{,}2.10^{6}\ {}^0K$.

Suy ra: $\frac{T}{T_0} = \frac{CU^2}{3P_0V_0} + 1 \approx 1{,}2.10^{6}\ {}^0K$.

5.80. (KB5 – 77). Bởi vì hệ cách nhiệt, công toàn phần A thực hiện trên khí bởi lực tác dụng lên pittông và áp lực khí quyển bằng sự biến thiên nội năng của chất khí ΔU : $A = \Delta U$

Ta ký hiệu T là nhiệt độ cuối cùng của chất khí. Khi đó:

$$\Delta U = C_V (m_1 + m_2)(T - T_0)$$

Để tìm công A_1 của lực đặt vào pittông cần phải trừ công của áp lực khí quyển $A_2 = P_0Sl$ khỏi công toàn phần A. Trong trường hợp này ta nhận được:

$$A_1 = C_V (m_1 + m_2)(T - T_0) - P_0Sl \qquad (*)$$

Trong biểu thức này chỉ có đại lượng T là chưa biết. Ta phải tìm nó. Muốn thế cần phải xét các giai đoạn của quá trình.

Rõ ràng là ban đầu áp suất của phần trái hình trụ lớn hơn phần phải:

$$P_1 = \frac{m_1}{\mu} \frac{RT_0}{lS} > P_2 = \frac{m_2}{\mu} . \frac{RT_0}{lS}$$

Vì vậy, trong sự chuyển động của pittông tới vách ngăn, khí ở phần phải hình trụ sẽ bị nén cho đến khi mà áp suất của nó chưa bằng P_1 và van chưa được mở. Vì rằng sự nén khí xảy ra đẳng nhiệt, thể tích của nó V_1 sau khi nén thỏa mãn.

$$P_1V_1 = P_2V_2$$

Trong đó: $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ – hệ số đẳng nhiệt, còn $V_0 = lS$.

Suy ra: $V_1 = V_0 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{1}{V}} = V_0 \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^{\frac{1}{V}}$

Nhiệt độ T_1 mà chất khí ở phần phải hình trụ có được khi đó tìm được từ phương trình trạng thái khi:

$$\left(\frac{PV}{T} = R \frac{m}{\mu} \right) \frac{1}{\gamma} - 1 \quad \Rightarrow \quad T_1 = \frac{P_1V_1\mu}{Rm_0} = \frac{P_1V_1}{P_2V_0} T_0 = T_0 \left(\frac{m_2}{m_1} \right)$$

Bây giờ khi áp suất ở phần phải bằng ở phần trái thì van tại vách ngăn được mở ra và các chất khí trộn lẫn vào nhau (lúc này pittông không được dịch chuyển). Có thể xác định nhiệt độ hỗn hợp T_1 từ phương trình cân bằng nhiệt.

$$C_V m_1(T_2 - T_0) = C_V m_2 (T_1 - T_2)$$

và $$T_2 = \frac{m_1 T_0 + m_2 T_1}{m_1 + m_2} = T_0\left[1 + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right]$$

Sau khi trộn lẫn toàn bộ khí có khối lượng $m = m_1 + m_2$ bị nén đẳng nhiệt từ thể tích $V = V_1 + V_0$ đến thể tích V_0, còn nhiệt độ của nó biến đổi từ T_2 đến T.

Khi đó: $TV_0^{\gamma-1} = T_2 V^{\gamma-1}$

Suy ra: $$T = T_2\left(\frac{V_1 + V_0}{V_0}\right)^{\gamma-1} = T_0 \frac{m_1}{m_1 + m_2}\left[1 + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right]^{\gamma}$$

Đặt T vào công thức (*), ta có:

$$A_1 = C_V (m_1 + m_2)T_0\left[\frac{m_1}{m_1 + m_2}\left(1 + (\frac{m_2}{m_1})^{\frac{1}{\gamma}}\right)^{\gamma} - 1\right] - P_0 Sl \approx 3674J\,.$$

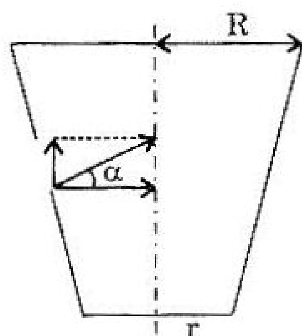
5.81. (KB5 – 75). Áp lực của chất lỏng $\Delta F_i = P\Delta S_i$ hướng vuông góc với mặt bên của nút chai tác dụng lên mỗi yếu tố diện tích mặt bên của nút chai. Do sự đối xứng, các thành phần nằm ngang của các lực này tác dụng lên các yếu tố diện tích bề mặt của nút chai là triệt tiêu nhau. Vì vậy hợp áp lực là thẳng đứng và bằng tổng các thành phần thẳng đứng của các lực này. Tức là:

$$F = \sum F_i \sin\alpha = \sum p\Delta S_i \sin\alpha = p\sum \Delta S_i \sin\alpha\,.$$

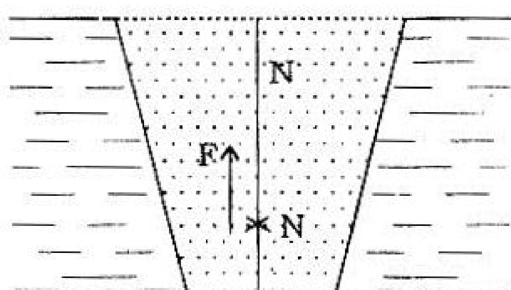
Tích số $\Delta S_i \sin\alpha$ là hình chiếu diện tích lên mặt phẳng song song với thành bình. Vì vậy tổng $\Delta S_i \sin\alpha$ bằng diện tích hình chiếu của mặt bên của nút chai lên mặt phẳng này, tức là $\Pi(R^2 - r^2)$.

Vì vậy: $F = p\,\Pi(R^2 - r^2)$

Ta dẫn ra một nghiệm của kỳ toán này. Ta xét bình phương hoàn toàn giống trong bài toán này nhưng không có lỗ thủng. Trong bình này ta tách ra một thể tích chất lỏng bằng thể tích của nút chai giữa các thành của bình (hình 3).



Hình 2



Hình 3

Vì rằng thể tích chất lỏng tách ra nằm trong trạng thái cân bằng nên hợp tất cả các lực tác dụng lên nó bằng không. Còn lực nào tác dụng lên thể tích chất lỏng được tách ra? Đây là các phản lực từ phía thành bình có độ lớn bằng:

$$N_1 = p \prod R^2 \quad \text{và} \quad N_2 = p \prod r^2,$$

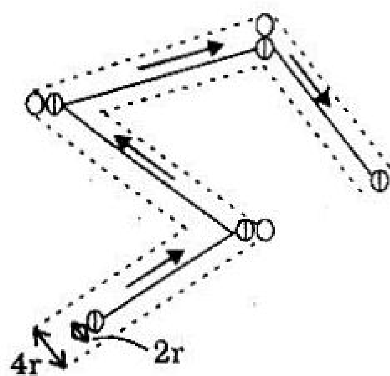
và hợp lực F từ phía chất lỏng bao quanh hướng thẳng đứng lên trên. Vì rằng :

$$N_1 - N_2 - F_3 \quad \text{nên} \quad F = N_1 - N_2 = \prod \zeta (R^2 - r^2).$$

Rõ ràng là chỉ có một lực này tác dụng lên nút chai từ phía chất lỏng.

5.82. (KB9 – 75).

Kích thước phân tử có thể đánh giá được nếu biết độ dài quãng đường tự do và số phân tử trung bình trong một đơn vị thể tích.



Ta xem phân tử là những quả cầu đàn hồi, bán kính r. Giả thiết rằng tất cả các phân tử, trừ một phân tử, là đứng yên. Phân tử chuyển động duy nhất khi chuyển động với vận tốc trung bình nào đó v hình như khoét nên thể tích hình trụ trong không gian bán kính 2r và van chạm với tất cả các phân tử khác, tâm của nó nằm trong thể tích này. Trong mỗi lần va chạm, hướng chuyển động của phân tử thay đổi và đường đi của nó là đường thẳng gấp khúc.

Thể tích toàn phần được khoét bởi phân tử trong không gian sau 1s bằng $4 \prod r^2 v$. Số va chạm trung bình trong 1s là $v = 4 \prod r^2 vn$, trong đó n – số phân tử trong một đơn vị thể tích trong điều kiện chuẩn $n = 2{,}7.10^{19}$ cm^{-3}.

Bây giờ có thể viết biểu thức cho độ dài quãng đường tự do trung bình λ. Vận tốc chuyển động trung bình của phân tử v, còn thời gian trung bình giữa hai lần va chạm $t = \gamma v = \frac{1}{v}$.

Vì vậy: $\lambda = vt = \frac{v}{V} = \frac{1}{4\Pi r^2 n}$

Từ đó ta tìm được bán kính của phân tử:

$$r = \frac{1}{2\sqrt{\Pi \lambda n}} = \frac{1}{2\sqrt{3,14.10^{-5}.2,7.10^{19}}} \approx 1,7.10^{-9}(cm).$$

5.83. (KB1 – 74). Theo định nghĩa, hiệu suất của chu trình bằng: $\eta = \frac{A}{Q_1}$

trong đó A là công thực hiện trong chu trình và Q_1 là nhiệt lượng nhận được bởi chất khí từ ngoài: công thực hiện trong chu trình bằng diện tích giới hạn bởi đường cong kín của chu trình trên giản đồ (P, V). Trong trường hợp này, đó là diện tích của tam giác ABC :

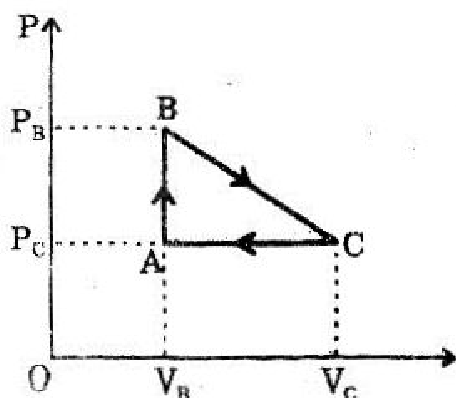
$$A = \frac{1}{2}(P_B - P_C)(V_C - V_B) = \frac{1}{4}P_C V_C$$

Bây giờ ta tìm nhiệt lượng nhận được bởi chất khí khi đốt nóng. Theo định luật I nhiệt động học:

$$Q = \Delta U + A$$

Trong đó ΔU – sự biến thiên nội năng của khí, A – công thực hiện bởi khí. Nếu Q > O thì khí nhận nhiệt, nếu Q < O thì nó toả nhiệt. Nội năng của khí đơn nguyên tử tỷ lệ với nhiệt độ của nó và bằng:

$$U = \frac{3}{2}\frac{m}{\mu}RT$$



Ta vẽ trên giản đồ (P, V) các đường đẳng nhiệt là các đường hypecbol PV = constant. Nhiệt độ T càng cao thì đỉnh của hypebol nằm càng xa điểm O. Vì vậy rõ ràng là khí nhận nhiệt từ nguồn khí đốt nóng đẳng tích trên phần AB, nhiệt lượng nhận được bằng sự biến thiên nội năng của khí:

$$Q'_1 = \Delta U_{AB} = \frac{3}{2}\frac{m}{\mu}RT_B - \frac{3}{2}\frac{m}{\mu}RT_A$$

Theo phương trình Mendelêp – plapeton: $PV = \frac{m}{\mu}RT$

thì $U = \frac{3}{2}PV$ và $Q'_1 = \Delta U_{AB} = \frac{3}{2}(P_B V_B - P_A V_A)$

$$= \frac{3}{2}\left(2P_C \cdot \frac{1}{2}V_C - P_C\frac{1}{2}V_C\right) = \frac{3}{4}P_C V_C.$$

Trên phần CA của sự nén đẳng áp, khí nhả nhiệt: nội năng của nó giảm ($\Delta U < 0$) và công được thực hiện trên chất khí ($A < 0$).

Bây giờ ta khảo sát quá trình giãn nở trên phần BC. Từ điều kiện bài toán suy ra rằng các điểm B và C nằm trong cùng đường đẳng nhiệt nên có nhiệt độ $T_B = T_C$. Từ hình vẽ ta thấy rằng trong quá trình giãn nở trên phần BC, điểm mô tả trạng thái khi ban đầu xa đường đẳng nhiệt (nhiệt độ của khí tăng lên), sau đó gần tới nó (nhiệt độ khí giảm đến nhiệt độ ban đầu). Trong quá trình giãn nở, khí thực hiện một công ($A > 0$). Nhưng ban đầu quá trình $B \rightarrow C$ khi được đốt nóng nên nội năng của nó tăng lên ($\Delta U > 0$). Khi đó $Q > 0$. Tức là khí nhận nhiệt từ ngoài. Vào cuối quá trình $B \rightarrow C$, khí được làm lạnh, nội năng của nó giảm, tức là $\Delta U < 0$. Trong trường hợp này khí có thể nhường nhiệt cho môi trường ngoài ($Q < 0$ nếu $|\Delta U| > A$)

Ta tìm điểm K của giản đồ mà sự giãn nở đến đó của khí được sinh bởi sự nhận nhiệt lượng từ ngoài và ta tìm nhiệt nhận được trong quá trình $B \rightarrow K$. Muốn thế ta tìm nhiệt lượng Q nhận được bởi khí phụ thuộc vào thể tích khí như thế nào?

Khi giã n nở từ thể tích V_B đến thể tích nào đó V_D, khí thực hiện một công bằng diện tích hình thang A'BDD'

$$A = \frac{1}{2}\left(V_D - \frac{1}{2}V_C\right)(P_D + 2P_C).$$

Đồng thời do khí là đơn nguyên tử và lý tưởng nên nội năng của vật biến thiên một lượng:

$$\Delta U = \frac{3}{2}P_D V_D - \frac{3}{2}P_B V_B = \frac{3}{2}(P_D V_D - P_C V_C)$$

và: $$Q = \Delta U + A = \frac{3}{2}(P_P V_P - P_C V_C) + \frac{1}{2}\left(V_P - \frac{1}{2}V_C\right)(P_P + 2P_C)$$

Trong công thức cuối có hai tham số D_D và V_P. Ta khử một hàng chúng. Muốn thế ta tìm sự phụ thuộc của áp suất P vào thể tích V trên phần BC. Vì rằng đồ thị của quá trình là thẳng nên:

$$P = P_0 = \alpha V$$

Trong đó P_0 và α là hệ số có thể tìm được. Khi $P = P_B = 2P_C$, $V = V_B = \frac{C_C}{2}$, còn khi $P = P_C$, $V = V_C$. Điều đó có nghĩa là:

$$2P_C = D_0 + \frac{1}{2}\alpha V_C, \qquad D_C = P_0 + \alpha V_C.$$

Giải kết hợp hai phương trình cuối ta tìm được:

$$P_0 = 3P_C, \qquad \alpha = -2\frac{P_C}{V_C}$$

Như vậy: $P_D = 3P_C - \frac{P_C}{V_C}V_D$

Và: $Q = \frac{3}{2}\left[\left(3P_C - 2\frac{P_C}{V_C}V_P - P_C\right)V_C\right] + \frac{1}{2}\left(V_D - \frac{1}{2}V_C\right)\left(5P_C - 2\frac{P_C}{V_C}V_D\right)$

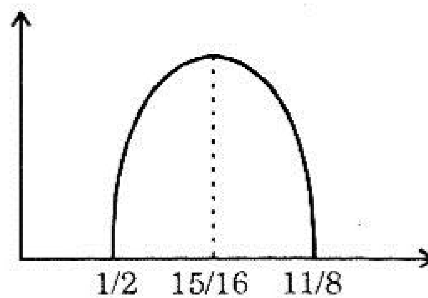
$$= P_C V_C\left(\frac{9}{2}\frac{V}{V_C} - 3\frac{V_D^2}{V_C^2} + \frac{5}{2}\frac{V_D}{V_C} - \frac{3}{2} - \frac{5}{4} - \frac{V_D^2}{V_C^2} + \frac{1}{2}\frac{V_D}{V_C}\right)$$

$$= D_C V_C\left(-4\frac{V_D^2}{V_C^2} + \frac{15}{2}\frac{V_D}{V_C} - \frac{11}{4}\right).$$

Ta ký hiệu: $\xi = \frac{V_P}{V_C}$

Khi đó: $Q = -\left(4 - \xi^2 - \frac{15}{2}\xi + \frac{11}{4}\right)P_C V_C$

Đồ thị phụ thuộc Q và ξ – parabol (hình) cắt trục ξ tại các điểm $\xi_1 = \frac{1}{2}$ và $\xi_2 = \frac{11}{8}$ (nó là nghiệm của phương trình bậc hai $4\xi^2 - \frac{15}{2}\xi + \frac{11}{4}$) và có đỉnh tại $\xi = \frac{15}{16}$. Tại điểm này, độ lớn của Q là cực đại và bằng $Q_1'' = \frac{49}{64}P_C V_C$.



Vì vậy trong sự chuyển từ B → C trên phầnBK, tức là đến trạng thái mà điểm K tương ứng với nó có tọa độ $V_K = \frac{15}{16}V_C$, khi nhận nhiệt từ

ngoài vào. Khi giãn nở tiếp theo (trên phần KC) thì nhả nhiệt.

Như vậy nhiệt lượng mà khí nhận được sau một chu trình bằng:

$$Q_1 = Q'_1 + Q''_1 = \frac{3}{4}P_C V_C + \frac{49}{64}P_C V_C = \frac{97}{64}P_C V_C.$$

Bây giờ có thể tìm được hiệu suất của chu trình

$$\eta = \frac{\frac{1}{4}P_C V_C}{\frac{97}{64}P_C V_C} \approx 0{,}165, \eta = 16{,}5\%$$

Còn hiệu suất lý thuyết cực đại của chu trình bằng:

$$\eta_{max} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

Trong đó T_1 – nhiệt độ cực đại và T_2 – nhiệt độ cực tiểu của khí.

Từ hình trên rõ ràng là nhiệt độ khí cực tiểu tại điểm A, tức là:

$$T_2 = T_A = \frac{\mu P_A V_A}{mR} = \frac{\mu P_C V_C}{2mR}$$

Điểm M trên đường thẳng BC, tại đó đường đẳng nhiệt tiếp xúc với đoạn thẳng BC, tương ứng với trạng thái của khí trong đó nhiệt độ của nó là cực đại. Vì sự đối xứng của đồ thị của chu trình rõ ràng là điểm này nằm tại trung điểm của đoạn thẳng BC, vì vậy $V_M = \frac{3}{4}V_C$.

Khi đó $PV = (PV)_{max} = \frac{9}{8}P_C C_C$.

Nhiệt độ của khí tại điểm M bằng:

$$T_1 = \frac{9\mu}{8mR}P_C V_C.$$

5.84. (KB 12 – 75). Vì rằng bình cách nhiệt nên sự biến thiên nội năng của khí bằng công của ngoại lực tác dụng lên pittông – trọng lực Mg và áp lực khí quyển. $\Delta U = A$.

$$\Delta U = (Mg + P_0 S)h, \quad \text{(h – đường đi của pittông).}$$

Bởi vì nội năng của khí chỉ phụ thuộc vào nhiệt độ nên trong quá trình bất kỳ sự biến thiên nội năng cũng giống như trong quá trình xảy ra trong thể tích không đổi, tức là:

$$\Delta U = C_V Z(T_1 - T_0)$$

Trong đó C_V – nhiệt dung riêng của một mol khí ở thể tích không đổi, Z – số phân tử gam khí. Vì vậy trong trường hợp của ta:

$$(Mg + P_0S)h = C_V Z(T_1 - T_0)$$

Suy ra: $$T_1 = T_0 + \frac{Mg + P_0 S)h}{C_V Z} \qquad (*)$$

Số phân tử khí trong hình trụ có thể tìm được từ phương trình trạng thái khí trước khi nén:

$$P_0 V = ZRT$$

Suy ra: $$Z = \frac{P_0 V}{RT_0}$$

Không khí về cơ bản bao gồm khí 2 nguyên tử – Nitơ và $\delta\alpha_0$. Vì vậy có thể xem $C_V = \frac{5}{2}R$. Nếu thay Z, C_V, $h = \frac{V}{25}$ vào (*), ta có:

$$T_1 = T_0\left(1 + \frac{Mg + P_0S}{5P_0S}\right).$$

MỤC LỤC